

Tesi di dottorato in fisica

***Microlensing* gravitazionale per la rivelazione
di MACHOs in direzione della galassia M31:
analisi dati con il metodo di AGAPE**

Sebastiano Calchi Novati

Ringraziamenti

Ringrazio il Prof. G. Scarpetta, per avermi accolto all'interno del suo gruppo di ricerca e avermi dato la possibilità di svolgere nel modo migliore questo lavoro.

L'attività di ricerca, analisi dati nell'ambito di un'indagine astrofisica, è stata svolta in gran parte presso il *Laboratoire de Physique Corpusculaire et Cosmologie* (PCC), al *Collège de France*, Parigi, in collaborazione con il gruppo di AGAPE. Sono grato a Yannick Giraud-Héraud, fonte continua di apprendimento e motivazione per la ricerca, e di cui ricordo in particolare l'appoggio costante e l'entusiasmo. Ringrazio Yann Le Du, inesauribile miniera di suggerimenti, per le numerosissime discussioni. Ringrazio il gruppo di AGAPE presente al PCC, Alain Bouquet, Michel Crézé, Jean Kaplan e quanti nel gruppo di ricerca si occupano di questioni legate alla cosmologia osservazionale, Alexandre Amblard, Jean-Cristophe Hamilton e Stephan Paulin, per la collaborazione prestata in ogni momento di bisogno. Ringrazio Claude Lamy per l'aiuto insostituibile offerto nella raccolta e nella classificazione dei dati, e tutte le persone che danno vita a questo laboratorio.

I dati sperimentali, acquisiti presso il telescopio McGraw-Hill dell'osservatorio MDM, Kitt-Peak (USA), sono condivisi con la collaborazione MEGA. Ricordo Andrew Gould e Robert Uglesich, conosciuti durante la mia esperienza sul sito delle osservazioni, che mi hanno iniziato con pazienza all'universo delle osservazioni astronomiche.

Ringrazio il gruppo di astrofisica dell'Università di Salerno, e in modo particolare Gerardo Iovane, sorgente di un aiuto prezioso, gruppo con il quale ho approfondito diverse fasi del lavoro di analisi, Valerio Bozza, Vincenzo Cardone e Virginia Re. Sono specialmente grato a Virginia per la pazienza e la comprensione con cui ha accettato di dividere il suo spazio di lavoro durante le ultime fasi della stesura della tesi.

Un ringraziamento particolare per Salvatore Capozziello e Gaetano Lambiase dei quali ho approfittato per trarre tanti indispensabili insegnamenti e con i quali ho avuto occasione di collaborare per lo sviluppo di un secondo interessante soggetto di ricerca.

Per i rimanenti 5 minuti al giorno strappati alla ricerca, ricordo Nathalie e Stefano, Yann, Giudith e tutta la famiglia Cingia, per l'amicizia e l'ospitalità offertami durante il soggiorno a Parigi. Ringrazio Andrea, con il quale ho diviso un appartamento (e tutto quello che ne consegue) durante il primo anno di dottorato. Sono contento di aver avuto l'opportunità di conoscere i dottorandi del mio stesso ciclo, Tiziana, Andrea, Gaia, Maria Teresa, Emiliano e Vincenzo.

Indice

Introduzione	8
1 La materia oscura e il <i>microlensing</i> gravitazionale	9
1.1 Introduzione	9
1.2 Il modello cosmologico standard	9
1.3 Evidenze osservative dell'esistenza della materia oscura	11
1.3.1 La nucleosintesi primordiale	12
1.3.2 Galassie a spirale	13
1.3.3 Ammassi di galassie	14
1.3.4 Struttura a larga scala dell'universo	15
1.4 Candidati per la materia oscura	15
1.4.1 Materia oscura non barionica	15
1.4.2 Materia oscura barionica	15
1.5 Teorie alternative della gravitazione	16
1.6 Il <i>microlensing</i> gravitazionale e la ricerca della materia oscura	17
1.6.1 I risultati sperimentali nella Galassia	20
1.6.2 <i>Microlensing</i> in direzione della galassia di Andromeda	24
1.6.3 Il <i>pixel lensing</i> e l'esperienza di AGAPE	25
2 Le osservazioni MDM e il trattamento delle immagini	29
2.1 Introduzione	29
2.2 Osservazioni e <i>set up</i> sperimentale	29
2.3 Riduzione e pre-analisi	32
2.3.1 Gli effetti strumentali	32
2.3.2 Analisi preliminare: i pixel caldi	35
2.3.3 "Normalizzazione" del flusso	37
2.3.4 Un diverso approccio alla normalizzazione del flusso	47
2.3.5 Composizione delle immagini	51
2.3.6 Analisi sulla stabilità delle immagini e valutazione degli errori	56
2.3.7 La scelta dell'immagine di riferimento	62
3 L'analisi del segnale	63
3.1 Introduzione	63
3.2 La ricerca di eventi significativi	64
3.3 Caratterizzazione del segnale	65
3.4 La curva di Paczyński	66
3.5 L'analisi dei residui	68
3.6 L'acromaticità	70
3.7 Le simulazioni	72
3.7.1 Analisi dell'efficienza dei test di selezione	72
3.7.2 Simulazioni Monte Carlo	79
3.8 Conclusioni sulla procedura di analisi	82

4	Lo studio delle curve di luce	84
4.1	Introduzione	84
4.2	Curve di luce di <i>novæ</i> e di altre stelle variabili	84
4.3	Prolungamento dei candidati AGAPE e POINT-AGAPE sui dati MDM	88
4.3.1	I candidati della collaborazione AGAPE	88
4.3.2	Un candidato della collaborazione POINT-AGAPE	90
4.4	Introduzione all'analisi dei dati MDM	92
4.4.1	I <i>clusters</i>	93
4.4.2	La selezione	94
4.4.3	Determinazione dei parametri della curva di luce e discussione dell'analisi dei residui	96
4.4.4	Un altro approccio alla caratterizzazione della curva: il fit a 7 parametri	99
4.5	La selezione: discussione su alcune curve di luce escluse	101
4.6	La selezione: i "candidati"	105
4.7	Discussione dei risultati	109
	Conclusioni	112

Lista delle figure

1.1	La curva di rotazione delle galassie a spirale	13
1.2	La geometria di un evento di <i>lensing</i>	18
1.3	La curva di Paczyński	19
1.4	I MACHOs nell’alone della Galassia	21
1.5	Curve di luce della collaborazione EROS	22
1.6	Curve di luce della collaborazione MACHO	23
1.7	Diversi obiettivi delle ricerche di <i>microlensing</i>	25
1.8	L’evento AGAPEZ1	27
1.9	Immagine HST relativa all’evento AGAPEZ1	28
2.1	Il telescopio McGraw-Hill	30
2.2	I campi osservati su M31	31
2.3	I dati “Echelle-Target”	32
2.4	L’immagine di riferimento	33
2.5	Le condizioni del <i>seeing</i>	34
2.6	Filtri ed efficienza CCD	35
2.7	I “pixel caldi”: immagine e “deriva” geometrica	36
2.8	I “pixel caldi”: l’effetto sulle immagini	36
2.9	Allineamento geometrico	38
2.10	Dispersione lungo le curve di luce	40
2.11	Una curva di luce “stabile”	41
2.12	Allineamento fotometrico: il metodo degli istogrammi	42
2.13	Il gradiente di luminosità sulle immagini	43
2.14	Allineamento fotometrico: i coefficienti	44
2.15	La stabilizzazione del <i>seeing</i>	45
2.16	La stabilizzazione del <i>seeing</i> : le curve di luce	46
2.17	Il <i>riflesso</i>	47
2.18	Nuovo metodo di normalizzazione del flusso: i coefficienti (1)	49
2.19	Nuovo metodo di normalizzazione del flusso: i coefficienti (2)	49
2.20	Nuovo metodo di normalizzazione: test di stabilità (1)	50
2.21	Nuovo metodo di normalizzazione: test di stabilità (2)	50
2.22	Variazione spaziale dei coefficienti di allineamento (1)	51
2.23	Variazione temporale coefficienti correzione	52
2.24	Composizione: relazione dispersione- <i>seeing</i>	54
2.25	Composizione: dispersione sulle curve “stabili”	55
2.26	Analisi stabilità in due notti di osservazione	56
2.27	Stabilità delle curve di luce: valutazione del χ^2	57
2.28	Analisi stabilità: valor medio	58
2.29	Analisi stabilità: dispersione	59
2.30	Dispersione sulle immagini composte	60
2.31	Analisi stabilità: distribuzione del χ^2 per le immagini composte	61
3.1	Test di ipotesi sui residui per una distribuzione gaussiana	70
3.2	Fit 4/5 parametri: distribuzione delle grandezze osservabili	73
3.3	Fit 4/5 parametri: il momento di massima amplificazione e il fondo	74
3.4	Fit 4/5 parametri: fit a 5 parametri	75

3.5	Fit 4/5 parametri: gli osservabili $t_{1/2}$ e R_{max} (1)	75
3.6	Fit 4/5 parametri: gli osservabili $t_{1/2}$ e R_{max} (2)	76
3.7	Fit 4/5 parametri: distribuzione del χ^2	76
3.8	Fit 4/5 parametri: distribuzione dei coefficienti dei test di ipotesi	77
3.9	Fit 4/5 parametri: relazione tra i test sul fit (1)	77
3.10	Fit 4/5 parametri: relazione tra i test sul fit (2)	78
3.11	Fit 4/5 parametri: relazione tra i test sul fit (3)	78
3.12	Fit 4/5 parametri: la valutazione del <i>tempo di Einstein</i>	79
3.13	Simulazione Monte Carlo (0): l'osservabile $t_{1/2}$	80
3.14	Simulazione Monte Carlo (0): la magnitudine apparente	81
3.15	Simulazione Monte Carlo: la magnitudine apparente	82
3.16	Simulazione Monte Carlo: distribuzione per $t_{1/2}$ e t_E	83
3.17	Simulazione Monte Carlo: curve di luce	83
4.1	Gli eventi candidati di <i>novæ</i> selezionate sul campo Target	85
4.2	Curve di luce MDM: esempi di <i>novæ</i>	86
4.3	Curve di luce MDM: stelle variabili	87
4.4	Una curva di luce rapidamente variabile	88
4.5	2 candidati <i>microlensing</i> nei dati TBL	89
4.6	Candidati TBL: prolungamento MDM (1)	90
4.7	Candidati TBL: prolungamento MDM (2)	90
4.8	Il candidato AGAPEZ1 sui dati TBL e MDM	91
4.9	Immagini INT e MDM per il candidato <i>microlensing</i> PA-99-N1	91
4.10	La curva di luce del candidato <i>microlensing</i> PA-99-N1 sui dati MDM	92
4.11	I <i>clusters</i>	94
4.12	Selezione: uno sguardo alle immagini	95
4.13	Selezione: fit indipendenti	96
4.14	Selezione: valutazione del χ^2 e test di Kolmogorov-Smirnov	97
4.15	Selezione: test di ipotesi di correlazione	97
4.16	Selezione: valutazione bontà del fit	98
4.17	Selezione: fit 6/7 parametri, osservabili	100
4.18	Selezione: fit 6 e 7 parametri, test sul fit	101
4.19	Curve di luce MDM: candidati rigettati (1)	102
4.20	Curve di luce MDM: candidati rigettati (2)	103
4.21	Curve di luce MDM: effetto cromatico	104
4.22	Curve di luce MDM: candidati eventi <i>microlensing</i>	106
4.23	I candidati eventi di <i>microlensing</i> selezionati sul campo Target	107
4.24	Curve di luce MDM: candidati rigettati con il fit a 6 parametri	108
4.25	Discussione dei risultati: simulazioni Monte Carlo (1)	109
4.26	Discussione dei risultati: simulazioni Monte Carlo (2)	109

Lista delle tabelle

3.1	Simulazione Monte Carlo: posizione degli eventi	81
4.1	Curve di luce di <i>novæ</i>	85
4.2	<i>Novæ</i> : analisi della cromaticità	85
4.3	Sorgenti variabili: analisi della cromaticità	88
4.4	Sorgenti variabili: analisi della cromaticità (2)	88
4.5	Selezione: alcune curve di luce escluse	101
4.6	Candidati eventi di <i>microlensing</i> : caratteristiche	105
4.7	Candidati eventi di <i>microlensing</i> : analisi statistica	107
4.8	Candidati eventi di <i>microlensing</i> : analisi della cromaticità	107
4.9	Candidati eventi di <i>microlensing</i> : l'analisi con il fit a 7 parametri	108
4.10	Candidati eventi di <i>microlensing</i> : <i>nuova</i> analisi con il fit a 7 parametri	108
4.11	Candidati eventi di <i>microlensing</i> : <i>nuova</i> analisi con il fit a 7 parametri (2)	108

Introduzione

Questo lavoro di tesi è dedicato al problema della ricerca e della caratterizzazione della *materia oscura*. A livello osservativo, su diverse scale, da quelle galattiche (in particolare nella Via Lattea) fino all'intero universo, esiste disaccordo tra le stime *dinamiche* della massa di oggetti astrofisici (come galassie o ammassi di galassie) rispetto alla stima della loro massa *luminosa*. Si tratta, in un certo modo, di un problema di massa *mancante*. Si rende così necessaria, nell'ambito del quadro teorico del modello cosmologico standard, l'introduzione di una componente di materia "oscura", nel senso che non emette radiazione elettromagnetica, la cui presenza può essere rilevata attraverso effetti gravitazionali. Nonostante la convergenza di prove osservative ed esigenze teoriche a sostegno dell'ipotesi della sua esistenza, un interrogativo a cui non è ancora stata data una risposta basata su solide evidenze sperimentali è quello della stessa natura di tale componente di massa.

Affrontiamo in particolare il problema della materia oscura negli aloni galattici, dove le evidenze osservative (curve di rotazione) risultano più stringenti. Per questo analizziamo un insieme originale di dati sperimentali (i dati "MDM", frutto di una apposita campagna osservativa tuttora in corso di svolgimento presso l'osservatorio Michigan-Dartmouth-MIT, USA) acquisiti per lo studio della componente oscura sotto forma di oggetti massivi compatti (MACHOs, *Massive Astrophysical Compact Halo Objects*) nell'alone della Galassia (la nostra Via Lattea) e della galassia vicina di Andromeda, M31 (ovvero NGC224). Questa ricerca si basa su di un effetto di natura gravitazionale, il *microlensing*, ovvero la deflessione della luce generata da un oggetto oscuro massivo in moto che attraversa la linea di vista tra l'osservatore e una sorgente luminosa che si manifesta con un incremento della luminosità della sorgente. Dallo studio di queste variazioni di luminosità nel tempo è possibile risalire, per via indiretta, alla distribuzione della materia sotto forma di MACHOs nell'alone. L'analisi è stata condotta con la tecnica detta del *pixel lensing* (proposta e implementata dalla collaborazione AGAPE, *Andromeda Galaxy Amplified Pixel Experiment*), che permette il rilevamento di variazioni di luminosità di stelle *non* risolte (in particolare questo consente di considerare le possibili sorgenti in una galassia distante come M31).

Nel capitolo 1, introdotti gli elementi del modello cosmologico standard e quindi il problema della materia oscura nell'appropriato contesto cosmologico e astrofisico, delineamo i principi del *microlensing* gravitazionale e il metodo del *pixel lensing*. Nel capitolo 2 descriviamo l'apparato sperimentale e l'acquisizione dei dati (a cui chi scrive ha avuto modo di partecipare direttamente). Quindi analizziamo in dettaglio il trattamento preliminare delle immagini necessario per rendere significativo il successivo studio dei segnali astrofisici interessanti. In particolare vengono discussi alcuni aspetti quali la composizione di più immagini e le operazioni di "normalizzazione" del flusso. Nel capitolo 3 affrontiamo le tematiche connesse all'analisi del segnale rispetto al problema della selezione di eventi di *microlensing*. Il "rumore" di fondo che ne contamina la ricerca è costituito da sorgenti intrinsecamente variabili. Per questo consideriamo in dettaglio il modo di sfruttare la caratteristica *acromaticità* del segnale che ci interessa. Basandoci su di una opportuna simulazione consideriamo inoltre il problema dell'efficacia dei criteri di selezione adottati. Discutiamo infine i risultati delle simulazioni Monte Carlo dell'esperienza. Vengono quindi approfonditi, nel capitolo 4, diversi aspetti legati all'analisi effettuata. Rivolgiamo particolare attenzione allo studio degli effetti cromatici delle variazioni di luminosità rilevate e discutiamo in questa prospettiva segnali di sorgenti variabili e in particolare alcuni attribuibili a delle *novæ*. Esponiamo quindi un primo risultato dell'analisi, lo studio del prolungamento sui nostri dati di candidati eventi *microlensing* rilevati da altre collaborazioni. Infine discutiamo i risultati della selezione, 5 *curve di luce* (la variazione di flusso nel tempo in un elemento dell'immagine) compatibili con un segnale di *microlensing*, e, alla luce delle simulazioni Monte Carlo, le conclusioni fisiche riguardo al problema posto.

La nostra analisi tende a confermare (in accordo con i risultati di analoghe esperienze svolte nell'ambito della Galassia) che solo una piccola frazione degli aloni galattici è costituita da MACHOs, e in particolare a escludere come componente importante quella di oggetti di massa substellare.

Capitolo 1

La materia oscura e il *microlensing* gravitazionale

1.1 Introduzione

Lo studio della composizione degli aloni galattici, in particolare della loro componente oscura oggetto di indagine in questa tesi, ha senso solo se posto nel più vasto contesto cosmologico, una descrizione coerente del quale è fornita dalla teoria della gravitazione di Einstein. Accanto a questa esistono necessità teoriche, come lo scenario dell'inflazione, ed evidenze sperimentali, lo studio della radiazione di fondo cosmico, che congiurano nell'indicare un universo con geometria spaziale piatta ($\Omega = 1$, dove Ω è il parametro di densità). Diverse evidenze sperimentali pongono un limite superiore $\Omega_m \approx 0.3 - 0.4$ per le stime *dinamiche* della *materia* contenuta nell'universo. La fisica dell'universo nei primi istanti dell'espansione (nel quadro della teoria del *Big Bang*) fornisce un'altra importante informazione, estrapolata dalla teoria della nucleosintesi primordiale, l'abbondanza di materia *barionica*, quindi il suo contributo alla densità di materia-energia dell'universo, $\Omega_b \approx 0.04$. Il contributo della materia barionica *luminosa* risulta del resto molto inferiore $\Omega_{lum} \approx 0.003$. Esistono cioè forti ragioni di credere che larga parte dell'universo sia composta da una componente di materia oscura, ovvero materia che non emette radiazione elettromagnetica (almeno non in modo sostanziale), e che può di conseguenza essere osservata solo attraverso i suoi effetti gravitazionali. La quantità di barioni prevista in ambito cosmologico potrebbe del resto essere sufficiente a spiegare le curve di rotazione delle galassie a spirale, come la Via Lattea e M31, la più stringente evidenza osservativa a favore dell'introduzione di una componente rilevante di materia oscura. Questi elementi, ne ricordiamo ora alcuni più in dettaglio, rendono necessaria una ricerca volta appunto alla rivelazione di una possibile componente della materia oscura, in particolare negli aloni delle galassie a spirale. In questo ambito, il *microlensing* gravitazionale si è rivelato uno strumento potente di ricerca di oggetti oscuri massivi compatti (MACHOs), candidati plausibili a svolgere questo ruolo.

1.2 Il modello cosmologico standard

Il modello standard della cosmologia (e.g. [118, 119]) ha il suo fondamento teorico nella teoria della Relatività Generale di Einstein (e.g. [155]). Di questa ricordiamo alcuni elementi chiave

- l'equivalenza tra massa ed energia;
- l'interpretazione della gravitazione come manifestazione della curvatura (dunque della geometria) dello spaziotempo.

Le equazioni di campo dell'universo descrivono la geometria e la dinamica, dunque il suo contenuto di materia. La loro formulazione, nell'ambito del cosiddetto *modello standard* (*Hot Big Bang*), riflette le ipotesi di isotropia (invarianza per rotazioni) e omogeneità (invarianza per traslazioni). Questo deve il suo successo alla spiegazione di 3 fondamentali evidenze sperimentali

- la radiazione di fondo cosmico;
- l'espansione dell'universo;

- l'abbondanza degli elementi primordiali.

Rimangono tuttavia aperti diversi problemi. Uno dei principali è lo studio del contenuto di materia dell'universo (indissolubilmente legato al fondamentale problema della formazione delle strutture). Diverse evidenze sperimentali confermano, su differenti scale di distanze, l'esistenza di una forma di materia (ovvero di energia), che non emette o assorbe radiazione elettromagnetica (se non molto debolmente), che contribuisce per più del 90% alla massa totale (ovvero all'energia) dell'universo. Questo è il problema della materia oscura (*dark matter*, già sollevato negli anni '30, [112, 164]), e tornato di attualità a partire dagli anni '70 [113].

Un problema a parte è quello della descrizione dei primi istanti dell'espansione, quando la teoria della Relatività Generale, nella sua formulazione “classica” (nel senso di “non quantistica”) non è più applicabile (e.g. [95]).

Nel modello cosmologico standard, dato l'elemento della metrica e il tensore energia impulso della materia (un fluido perfetto con densità ρ e pressione p), l'evoluzione temporale del fattore di scala cosmico $a(t)$ è data da

$$H \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k c^2}{a^2(t)} + \frac{\Lambda c^2}{3}, \quad (1.1)$$

dove ρ è il termine di densità di energia (materia e radiazione), k il termine di curvatura ($k = 0, +1, -1$ rispettivamente caratterizza la curvatura spaziale dell'universo come piatta, positiva e negativa), G la costante di gravitazione di Newton, Λ la costante cosmologica (questo termine può essere considerato come quello di densità di “energia del vuoto”). Ponendo $k = 0$ si definisce il valore detto di “densità critica”, ρ_c che segna il limite tra un universo chiuso e uno aperto (se $\rho > \rho_c$ o $\rho < \rho_c$ rispettivamente)

$$\rho_c = \frac{3 H_0^2}{8 \pi G} = 1.9 \times 10^{-29} h^2 g/cm^3 = 2.8 \times 10^{-7} h^2 M_\odot / pc^3, \quad (1.2)$$

dove $h = H_0/100 km/s/Mpc$ parametrizza l'incertezza sulla determinazione del valore della costante di Hubble ($1 pc = 3 \cdot 10^{18} cm$, $M_\odot = 2 \cdot 10^{33} g$ è la massa del Sole, e si indicano i valori attuali di tutte le grandezze dipendenti dal tempo, come H , ponendo un indice 0).

L'equazione (1.1) viene generalmente espressa in funzione dei differenti parametri di densità di materia Ω , espressa in unità della densità critica (1.2), associati a ciascuno delle diverse componenti di energia

$$\Omega_m(t) + \Omega_\Lambda(t) + \Omega_k(t) = 1, \quad (1.3)$$

nell'ordine, la componente di materia, quella associata alla costante cosmologica e quella di curvatura (la componente dovuta alla radiazione può essere trascurata con ottima approssimazione). Il parametro Ω può essere visto come unità di misura naturale della densità di massa su grande scala, in particolare

$$\Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_c}. \quad (1.4)$$

Il problema aperto della cosmologia è quello di determinare il peso relativo di questi differenti termini, in particolare delle varie componenti di Ω_m , e l'incidenza (di fatto, anche l'esistenza) di Ω_Λ . Definendo

$$\Omega \equiv \Omega_m + \Omega_\Lambda. \quad (1.5)$$

Rileggendo la (1.3) è manifesto il legame tra la dinamica e la geometria dell'universo.

L'interesse di esprimere le equazioni di campo in termini del parametro di densità è data dalla possibilità di dedurre sperimentalmente il suo valore. Prima di discutere questo problema dal punto di vista delle osservazioni è però opportuno ricordare che esistono forti motivazioni teoriche a favore del valore $\Omega = 1$ ($k = 0$, universo *piatto*). Queste vengono comprese nello scenario dell'*inflazione* [76, 101], una fase di espansione molto rapida (caratterizzata da un'espansione accelerata, con $\ddot{a} > 0$ e $a(t) \propto t^\alpha$ dove $\alpha > 1$) dell'universo guidata da una forma di energia del vuoto, che permette di risolvere elegantemente diversi problemi del modello standard e *prevede* $\Omega = 1$. L'evidenza osservativa, indiretta, più vincolante per un valore totale di $\Omega \approx 1$, quindi di nuovo per un universo piatto, viene dalle recenti osservazioni sulla posizione dei primi due picchi acustici osservati sullo spettro delle anisotropie della radiazione di fondo cosmico (BOOMERANG, [46] e MAXIMA, [80]).

Per quanto riguarda il contenuto di *materia*, le valutazioni dinamiche per il parametro di densità sono tali che $\Omega_m \approx 0.3 \ll 1$, mentre i valori ottenuti a partire dalle stime della materia *visibile* sono

significativamente differenti (fino a cento volte *inferiori*). In questo contesto si inserisce il problema, in un certo modo la “necessità”, della presenza di materia oscura. La richiesta $\Omega \approx 1$ esige poi l'introduzione di un termine di costante cosmologica.

La costante cosmologica può essere interpretata come una sorta di energia del vuoto a pressione *negativa* in grado di *accelerare* l'espansione. L'effetto di un termine di pressione negativa si deduce immediatamente dalla seconda equazione di Einstein per l'espansione del fattore di scala $a(t)$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} (\rho + 3p) . \quad (1.6)$$

Avendo recenti risultati ottenuti con le ricerche sulle *supernovæ* di tipo Ia [120] messo in evidenza un'accelerazione nell'espansione dell'universo, la presenza di una costante cosmologica ha ripreso credibilità. Valori accreditati per il contributo della costante cosmologica, sempre dagli studi sulle *supernovæ*, sono $\Omega_\Lambda \approx 0.6 - 0.7$, valori elevati che potrebbero entrare in conflitto con le teorie sulle formazioni delle strutture. Una possibile risposta verrebbe allora dalle teorie quantistiche di campo dove l'introduzione di un campo scalare (*quintessence*), *variabile* nel tempo, potrebbe generare la pressione negativa necessaria per l'accelerazione [34].

Per quanto riguarda la materia, che determina il valore del termine di densità Ω_m , può essere schematicamente divisa in 3 distinte categorie

- materia visibile (o luminosa), osservata perché emette e/o assorbe radiazione elettromagnetica, e questa, di più immediata osservazione, è l'ordinaria materia barionica che compone le stelle;
- materia barionica *non* visibile, i limiti sulla sua quantità sono dedotti dalla nucleosintesi primordiale;
- materia *non* barionica *non* visibile, osservabile solo attraverso la sua azione gravitazionale.

Concludendo, nell'ambito del modello cosmologico standard, la cui dinamica (e geometria) è fissata da una serie di parametri liberi, lo scenario più plausibile, in accordo con le osservazioni, è quello di un universo piatto con un contributo importante alla densità totale cosmologica associato a una qualche forma di energia negativa $\sim 2/3$, e il rimanente $\sim 1/3$ a materia con pressione positiva [15, 150]. Di questa ultima frazione però solo una piccola parte viene osservata sotto forma di normale materia barionica luminosa.

1.3 Evidenze osservative dell'esistenza della materia oscura

Con la notevole eccezione delle predizioni legate alla nucleosintesi primordiale, le stime del parametro di densità sono in genere legate al rapporto massa su luminosità (Υ) caratteristico del sistema in considerazione. Per la materia *luminosa*, tipicamente le stelle in ambito galattico, risulta per esempio $M/L \approx 5 M_\odot/L_\odot$. Dato inoltre il valore della densità di luminosità media dell'universo j_0 , si deduce direttamente il valore di Ω relativo, nel caso specifico

$$\Omega_{lum} = (j_0 \cdot M/L)/\rho_c = \rho_{lum}/\rho_c \approx 0.003h^{-1} . \quad (1.7)$$

La costante di Hubble (ovvero h , valore intimamente legato alla determinazione dell'“età” dell'universo osservato) può essere misurata con diversi metodi. Risultati recenti forniscono un valore $h \sim 0.6 - 0.7$ (e.g. [117, 134]). La densità di materia luminosa è dunque molto piccola, molto inferiore a 1.

In generale, dato il valore della densità critica (1.2), si può scrivere una relazione tra il rapporto massa su luminosità di un generico sistema e il corrispondente valore di densità cosmologica

$$\frac{M}{L_B} \approx 1900 \Omega h . \quad (1.8)$$

Abbiamo indicato L_B in quanto non va dimenticato che tale rapporto dipende, come j_0 , dalla lunghezza d'onda di osservazione, la relazione scritta valendo per il blu, e valori su lunghezze d'onda differenti potendo variare notevolmente (nel visibile, ad esempio, vale $M/L_V \approx 1500 \Omega h$). In questo caso le unità di massa e luminosità sono definite in modo tale che $M_\odot/L_\odot = 1$.

Posto nei termini del rapporto massa su luminosità, il problema della materia oscura si può formulare dicendo che questo rapporto aumenta all'aumentare della scala spaziale della regione esaminata, indicando

cioè la presenza di una componente di materia oscura più diffusa della materia luminosa. Dal valore $\Upsilon \approx 5$, come abbiamo visto caratteristico per la componente luminosa di un tipico campione di stelle, si passa, per le galassie a spirale, a $\Upsilon \approx 30 - 60$ (questo al variare delle dimensioni dell'alone), per gli ammassi di galassie a $\Upsilon \approx 100 - 400$, a valori ancora leggermente più elevati per i superammassi (per ottenere valori $\Omega \approx 0.3 - 0.4$, e infine a $\Upsilon \approx 1900$ per l'universo nel suo insieme, nell'ipotesi in cui $\Omega = 1$).

Il problema della materia oscura, o di “massa mancante” (si può adottare questa terminologia per sottolineare la necessità della sua esistenza per conciliare tutte le osservazioni) si pone allora evidentemente in modi differenti al variare delle scale di osservazione. E' importante tenere presente che la soluzione, nei diversi casi, non deve necessariamente essere la stessa.

Storicamente si può ricordare, per esempio, come fu proprio un problema di massa mancante, derivato dallo studio del moto degli altri pianeti, a condurre Le Verrier e Adams nel 1846 alla scoperta di Nettuno, all'interno del Sistema Solare, o, pochi anni più tardi, alla scoperta di una nana bianca in orbita attorno a Sirio (prevista teoricamente già nel 1844 da Bessel). In entrambi questi casi lo studio del potenziale gravitazionale permise di guardare oltre le frontiere (di allora) del visibile. Il problema, su scale differenti, si pone oggi negli stessi termini. Nasce, ripetiamo, dall'osservazione che le valutazioni della massa di differenti oggetti nell'universo basate sullo studio della dinamica non sono in accordo con le valutazioni della massa, per gli stessi oggetti, basate sull'osservazione delle loro componenti luminose.

Rimangono oggi aperte diverse questioni (sembrando invece definitivamente chiuso il problema riguardo la possibilità di una componente “oscura” nel disco valutata ormai inferiore al 10% del totale [42])

- su scala delle galattiche, in particolare negli aloni ($\sim kpc$);
- sulla scala degli ammassi di galassie ($\sim Mpc$);
- su larga scala, dell'universo nel suo insieme ($\sim Gpc$).

Un discorso a parte, come ricordato, va fatto per la nucleosintesi primordiale.

1.3.1 La nucleosintesi primordiale

La (1.7) è un ragionevole indicatore dell'abbondanza di componenti barioniche luminose nell'universo (studi di galassie e di ammassi di galassie [121, 82] convergono tutti a questo valore). La densità numerica *totale* dei barioni può però essere stimata anche in altro modo, basandosi su considerazioni estrapolate dalla nucleosintesi primordiale degli elementi leggeri come il deuterio e l'elio (e.g. [152, 144]). Una quantità rilevante in questa discussione è il rapporto di densità barioni-fotoni $\eta = n_b/n_\gamma$, costante durante l'evoluzione dell'universo in una porzione di volume “comovente” con l'espansione. Definendo $\eta_{10} \equiv 10^{10}\eta$, si esprime questo rapporto in termini della densità attuale di barioni, Ω_b (essendo del resto la densità di fotoni oggi dominata dalla radiazione di fondo cosmico), per cui $\eta_{10} = 273 \Omega_b h^2$. Il limite superiore di η è un indicatore del massimo contributo ammissibile dei barioni alla densità dell'universo.

La materia barionica nell'universo è costituita, in massima parte, da idrogeno e da elio ^4He , nel rapporto $3/4, 1/4$, e in minima parte da tutti gli altri elementi più pesanti (i “metalli”). L'elio può solamente essere prodotto nei processi evolutivi successivi alla nucleosintesi (a differenza degli altri elementi), ed è quindi possibile estrapolare un sicuro limite *superiore* alla sua abbondanza. Questa è, d'altra parte, relativamente insensibile al valore preciso di η , mentre dipende piuttosto alla velocità relativa di espansione dell'universo. Il deuterio, al contrario molto sensibile al rapporto η , viene completamente bruciato nei cicli stellari, e la sua abbondanza osservata è un limite *inferiore* alla sua abbondanza primordiale. Recenti, seppure disputati, studi sui *quasars* Q1937 e Q1009 [26, 27] suggeriscono un'abbondanza relativamente alta di deuterio, da cui segue una stima precisa dell'abbondanza dei barioni [28]

$$0.018h^{-2} < \Omega_b < 0.020h^{-2}. \quad (1.9)$$

Le recenti osservazioni della radiazione di fondo cosmico [46, 80, 98] danno una stima, indipendente, leggermente superiore, $\Omega_b h^2 \approx 0.030$.

Le stime della materia *visibile* (1.7) non tengono conto dell'eventuale presenza di barioni in nubi di gas, per esempio negli ammassi di galassie [63], che potrebbero svolgere un ruolo importante. Va comunque considerato il piccolo contributo della densità di materia *barionica*, $\Omega_b \approx 0.04 - 0.06 \ll 1$, e la possibilità che la relativa componente *visibile* sia ancora più piccola $\Omega_v \approx 0.003$.

Fissati i limiti sulla materia *barionica*, torniamo a discutere in qualche dettaglio le valutazioni di Ω_m sulle diverse scale di grandezze indicate.

1.3.2 Galassie a spirale

L'evidenza sperimentale più forte per l'esistenza di materia oscura viene dall'analisi delle curve di rotazione delle galassie a spirale, ovvero della velocità di rotazione in funzione della distanza dal centro galattico R [131, 148, 148, 20, 19]. Questa viene misurata, lungo il disco in rotazione, studiando il moto delle stelle più periferiche e luminose, e per effetto Doppler sulle nubi di gas di idrogeno neutro. Questo permette di spingersi oltre i $30 kpc$ dal centro. La misura della velocità di rotazione $v(R)$ permette di calcolare la massa all'interno del raggio R . La luminosità, d'altra parte, decresce nel disco secondo una legge esponenziale, su una distanza caratteristica di alcuni kpc ($4 kpc$ per la Galassia). Se la luce fosse un buon indicatore, dovremmo quindi trovare la massa concentrata all'interno di tale distanza caratteristica.

Ipotizzata una distribuzione sferica e virializzata della massa, il legame tra la velocità di rotazione $v(R)$ e la massa contenuta all'interno del raggio R è dato da

$$\frac{GM(R)}{R} = v^2(R). \quad (1.10)$$

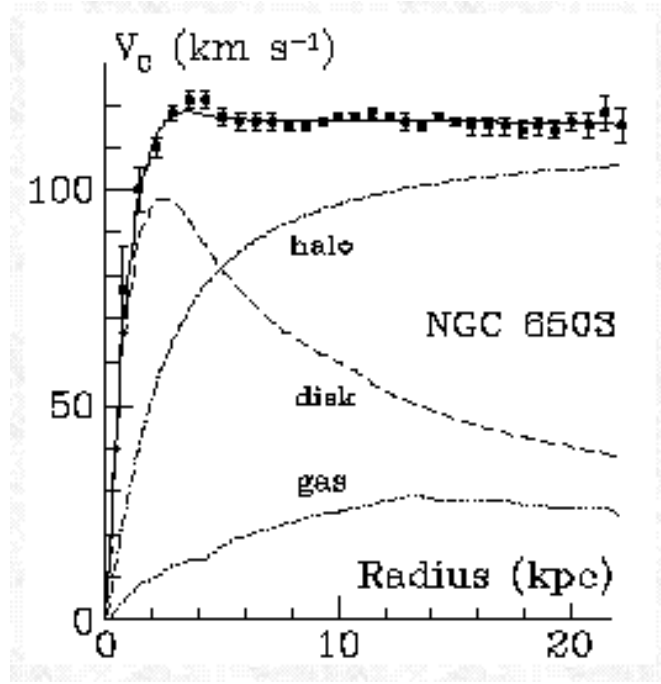


Figura 1.1: La curva di rotazione di una tipica galassia a spirale, NGC6503, insieme ai punti osservati, sono tratteggiati i contributi relativi della materia luminosa (*disk*) con un andamento kepleriano, quello dei gas diffusi, soprattutto idrogeno, e il contributo dell'alone, (*materia oscura*), necessario per spiegare il profilo osservato.

Al di fuori della zona centrale luminosa, se la massa fosse completamente correlata alla luminosità, $v(R)$ dovrebbe decrescere come $R^{-1/2}$. Le osservazioni nella Via Lattea, e ormai sistematiche su numerose altre galassie a spirale, mostrano invece tutte un andamento delle curve di rotazione che rimane *costante* allontanandosi dal centro della galassia, questo fino ai limiti delle osservazioni ($\approx 40 kpc$) (Fig. 1.1). Questo implica un aumento lineare della massa in funzione della distanza dal centro. Un profilo della densità dell'alone normalmente considerato è allora il modello di una sfera isoterma senza singolarità centrale [33]. Nel caso della Galassia si ha

$$\rho_{alone}(r) \approx \rho_{alone}(0) \frac{r_{\odot}^2 + a^2}{r^2 + a^2}, \quad (1.11)$$

dove il “raggio centrale” a di *core* è dell'ordine di $5 kpc$, la densità dell'alone nei pressi del Sole (situato a una distanza $r_{\odot} \sim 8.5 kpc$ dal centro galattico) $\rho_{alone}(0) \approx 0.01 M_{\odot}/pc^3$, di circa dieci volte inferiore alla densità del disco, che ha però uno spessore molto ridotto ($\sim 10^2 pc$), mentre l'alone si estende per decine

di *kpc*. Valori tipici della velocità di rotazione alla distanza del Sole sono $v_c \sim 220 \text{ km/s}$. Mostrando, la distribuzione della componente visibile luminosa della massa, l'andamento atteso, si deduce allora la presenza di una componente dell'alone "oscura", necessaria per spiegare le misure dinamiche della massa. La "coincidenza" dell'uguaglianza della velocità di rotazione della materia luminosa al centro con quella originata dalla materia oscura a distanze più grandi (quando materia oscura e luminosa dovrebbero essere scorrelate), la cosiddetta cospirazione disco-alone, rimane un problema aperto.

Nella Via Lattea, dove pure le osservazioni *dall'interno* sono più difficoltose, l'andamento studiato della distribuzione della materia si traduce in un valore $M/L \approx 10$ fino ai limiti della zona luminosa $\sim 10 \text{ kpc}$, per arrivare a dei valori molto più elevati $M/L \approx 30$ a distanze $\sim 100 \text{ kpc}$. Questo si traduce in un valore del parametro di densità cosmologica $\Omega \approx 0.03 h^{-1} (R_{\text{alone}}/100 \text{ kpc})$ (valore molto superiore a quello dedotto dallo studio della componente luminosa della Galassia (1.7)). Va d'altronde osservato che la stessa estensione spaziale dell'alone non è determinata con precisione. Di conseguenza, le stime della massa dedotte dallo studio delle curve di rotazione vanno sempre intese piuttosto come dei limiti inferiori. Le osservazioni descritte rimangono confinate sul piano galattico. Diverse evidenze però indicano che l'alone sia piuttosto di forma *sferica*: le simulazioni numeriche per gli studi di stabilità del disco, da una parte, l'analisi della velocità di rotazione di oggetti isolati (ammassi globulari o galassie nane) al di fuori del piano galattico fino a un centinaio di *kpc* (con valori del rapporto massa su luminosità che crescono $M/L \approx 40 - 60$). Queste stesse osservazioni spingono alcuni a ritenere che esso si estenda oltre $200 - 300 \text{ kpc}$ [161, 157], significando così che esso si congiungerebbe con quello della galassia di Andromeda, M31, che si trova a una distanza di oltre 700 kpc . Deduzioni analoghe circa il rapporto M/L , e le conseguenti deduzioni circa l'esistenza di una componente "oscura" nell'alone possono essere fatte per altre galassie a spirale.

Per quanto riguarda la stima della massa della Galassia, studi recenti danno un valore della massa totale *dinamica* di $\sim 2 \times 10^{12} M_\odot$, con un contributo della popolazione stellare del disco e del *bulge* di $\sim 6 \times 10^{10} M_\odot$ e $\sim 3 \times 10^{10} M_\odot$ rispettivamente [157].

Un punto fondamentale è che il confronto di questi risultati con quelli della nucleosintesi primordiale sull'abbondanza dei barioni rende plausibile l'ipotesi che tale componente oscura negli aloni sia costituita interamente da ordinaria materia barionica.

La questione della presenza di materia oscura nelle galassie ellittiche è più problematica. Differenti evidenze suggeriscono comunque, anche in questo caso, la presenza di un importante componente oscura, con valori $M/L \approx 20$.

1.3.3 Ammassi di galassie

A scale di distanza superiore, gli oggetti caratteristici sono i gruppi e gli ammassi di galassie. Una stima nel Gruppo Locale, basato sullo studio delle orbite relative della Via Lattea e di M31, porta a $M/L \approx 100$. Studi di ammassi, come quelli di Coma, Perseus e Virgo, sono basati sul Teorema del Viriale, quindi su misure della dispersione di velocità e sulla separazione media delle componenti. Nel caso di Coma si deduce un rapporto $M/L \approx 300 h$ [156], su altri grandi ammassi dei valori tipici dello stesso ordine di grandezza. Tutto ciò su una scala di distanza dell'ordine dei *Mpc*. Il metodo del viriale si presta però a numerose critiche, dovute alla non certa determinazione delle grandezze caratteristiche delle componenti degli ammassi (eccentricità delle orbite, distanze, velocità, di cui si misura solo la componente radiale), nonché al fatto che potrebbero non aver raggiunto l'equilibrio dinamico. Queste stime sono però state confermate da altri studi indipendenti. Gli ammassi emettono nella parte X dello spettro [25, 137]. L'irraggiamento proviene da un plasma caldo in cui sono immersi, in equilibrio nel potenziale dell'ammasso. I valori dei rapporti stimati di massa su luminosità sono compatibili con quelli determinati dallo studio del Teorema del Viriale. Un'altra analisi indipendente è fatta sfruttando il fenomeno del *lensing* gravitazionale, la deviazione della luce in presenza di una distribuzione di massa. In questo caso le sorgenti sono delle galassie sullo sfondo, le lenti gli stessi ammassi in primo piano (*weak lensing*) [151, 93, 23]. Appaiono allora delle caratteristiche strutture ad arco. Le distanze relative sono determinabili dallo studio dello spostamento spettrale, con differenze del redshift tipiche molto elevate, le lenti si trovano tipicamente a una distanza $z \sim 0.2 - 0.5$, le sorgenti $z \sim 1$. La distribuzione della massa della lente può essere ricostruita dallo studio di queste distorsioni. Questa analisi conferma ancora le stime sul rapporto massa su luminosità degli ammassi riportate in precedenza ($M/L \approx 400 - 800$). Il parametro di densità cosmologica, dati gli ammassi come campione rappresentativo dell'universo, è circa $\Omega \sim 0.2$.

1.3.4 Struttura a larga scala dell'universo

Studi della struttura a larga scala dell'universo sono condotti attraverso misure dei campi di velocità degli ammassi, fino a distanze nell'ordine delle centinaia di Mpc [47]. Il Gruppo Locale, per esempio, è in “caduta” verso l'ammasso di Virgo (a circa $20 Mpc$). Il metodo sviluppato per la ricostruzione del potenziale, POTENT [22, 48], dà risultati in accordo con quelli della distribuzione delle galassie osservata nell'infrarosso dal satellite IRAS [146]. Il valore del parametro di densità dedotto su questa scala di distanze è compreso tra $0.2 \leq \Omega \leq 1$ [141].

1.4 Candidati per la materia oscura

Posta l'esistenza di una forma di materia oscura, che del resto pare dominare il contenuto energetico dell'universo, rimane aperto il problema della determinazione della sua natura. Candidati motivati, su basi teoriche, sono stati proposti in un intervallo di massa molto ampio, da $\sim 9 \times 10^{-72} M_\odot$ (*assioni*), fino a $\sim 10^4 M_\odot$ (*buchi neri*). Circa 75 ordini di grandezza. Evidentemente occorrono tecniche differenti per i diversi candidati, e del resto occorre considerare, ponendosi come abbiamo ricordato il problema in modo diverso su diverse scale di distanza, che è probabile che esistano, in corrispondenza, risposte diverse.

Una classificazione dei diversi candidati al ruolo di materia oscura non è semplice. Una distinzione grossolana può essere fatta tra materia *barionica* e materia *non barionica* (e.g. [49, 39]).

Sull'ipotesi della materia barionica, materia ordinaria composta di protoni e neutroni, gravano i vincoli posti dalla nucleosintesi primordiale (1.9). Questi, letti insieme a quelli sull'abbondanza della materia luminosa (1.7), suggeriscono che una parte rilevante di materia sia effettivamente oscura. Simili stringenti vincoli osservativi non esistono sull'abbondanza della materia *non barionica*, ma i candidati più motivati teoricamente, la cui esistenza è del resto *prevista* nell'ambito della teoria del *Big Bang*, non sono ancora stati rilevati sperimentalmente.

1.4.1 Materia oscura non barionica

Candidati al ruolo di materia oscura non barionica sono diversi tipi di particelle elementari, di cui ricordiamo qui solo alcuni esempi. Una importante categorizzazione è quella che le distingue tra “calde” (HDM, *Hot Dark Matter*) e “fredde” (CDM, *Cold Dark Matter*). Questa terminologia fa allusione alla velocità propria delle particelle al momento dell'inizio della formazione delle galassie (relativistica per le particelle “calde”, non relativistica per quelle “fredde”). Questa distinzione è fondamentale per gli scenari di formazione galattica. Attualmente quelli connessi all'ipotesi di CDM, gli scenari *bottom-up*, benché non privi di problemi, sono preferiti a quelli *top-down* connessi invece alla HDM. Rispettivamente sono quelli dove le strutture a piccola scala sono quelle a formarsi per prime piuttosto che il contrario (e.g. [119]).

Tra i candidati *hot* un posto particolare spetta alle diverse famiglie di *neutrini* (sono le *uniche* a essere state rilevate sperimentalmente). Del resto, solo recentemente [62] sono emerse le prime prove sperimentali che questi potrebbero essere dotati di una massa (e.g. [32]). Per il neutrino *muonico*, risultati pur controversi sembrano indicare $m(\nu_\mu) > 0.5 eV$, che implica un contributo $\Omega_\nu > 0.005$, già comparabile a quello della materia luminosa. Come detto, un contributo importante si scontrerebbe del resto con le ipotesi più accreditate per la formazione delle strutture (e.g. [55]).

Un'altra famiglia di particelle *cold* è quella dei WIMPs (*Weakly Interacting Massive Particles*), per un intervallo di massa $0.1 \div 1 \text{ TeV}$ [57, 129]. Le motivazioni teoriche della loro esistenza sono legate alle teorie supersimmetriche. Il candidato favorito è il *neutralino* [88], con una massa nell'intervallo $30 - 600 \text{ GeV}$ cui corrisponde $\Omega h^2 \sim 0.1$.

Sempre motivata dalla fisica delle particelle elementari, in connessione al problema della simmetria CP, è l'esistenza degli *assioni* (e.g. [149, 124]), con massa $\sim 10^{-5} \text{ eV}$, pure candidati alla spiegazione della chiusura dell'universo, per la cui formazione sono proposti diversi scenari [140].

1.4.2 Materia oscura barionica

Come ricordato, diverse evidenze suggeriscono l'esistenza di una componente importante di materia barionica oscura. In particolare, la componente oscura delle galassie potrebbe essere costituita interamente

da materia di questo tipo (e.g. [38]). Riguardo questo aspetto, il problema posto è di nuovo quello di determinarne la natura.

Una componente importante di idrogeno ionizzato è esclusa da diverse evidenze sperimentali (assenza di flussi nelle regione X dello spettro [52]), rimane però aperta la possibilità che altre forme non aggregate, in particolare gas di idrogeno molecolare, potrebbero costituire una parte importante di materia oscura [122, 50, 51].

L'alternativa naturale è che i barioni si trovino in uno stato aggregato. Tali aggregati massivi sono allora collettivamente indicati con il nome di MACHOs¹, potendo questi variare in un amplissimo intervallo di massa.

Un limite importante è fissato dalla possibilità di innescare le reazioni termonucleari dell'idrogeno alla base dell'evoluzione stellare a $\sim 0.08 M_\odot$.

Nel limite opposto, stelle con massa superiore a $\geq 200 M_\odot$ sono dette *Very Massive Objects* [41], potrebbero essere rilevate per via della radiazione di fondo da loro rilasciata nell'infrarosso. Effetti di questo genere sono stati osservati, ma sono di interpretazione controversa, potendo essere attribuiti ad altri oggetti noti [61]. Oggetti ancora più pesanti, stelle con massa $\geq 10^5 M_\odot$ (*Super Massive Objects*), collasserebbero direttamente in buchi neri, che svolgerebbero poi un rilevante ruolo dinamico [40]. Osservazioni in questo senso non sono state del tutto chiarite. In generale una componente importante data da oggetti pesanti $\geq M_\odot$, come buchi neri e stelle di neutroni, viene esclusa in quanto porterebbe a una sovra-produzione, rispetto a quanto altrimenti osservato, di elementi pesanti.

I MACHOs potrebbero essere stelle di piccola massa, $\sim 0.1 - 0.3 M_\odot$, dette *M-dwarfs*. Osservazioni del HST (*Hubble Space Telescope*) nell'alone galattico [14], e nell'infrarosso con ISO in 4 galassie a spirale vicine [65] sembrano escludere questa possibilità.

Un'ipotesi a lungo dibattuta ruota intorno alla possibilità di un'importante frazione costituita da *nane bianche* [147] (*White Dwarfs*). Recenti osservazioni con l'HST [83], poi confermate spettroscopicamente [84], di 5 candidati del genere, con $M \sim 0.5 M_\odot$, supportano questa ipotesi che rimane esposta a diversi problemi (eccesso di produzione di metalli, numero elevato di *supernovæ* di tipo 1A prodotte dai precursori delle WDs attuali, limite inferiore sull'età per ogni WD trovata nell'alone [72]).

Diversi oggetti di massa compresa nell'intervallo $\sim 0.001 - 0.08 M_\odot$ (*nane brune*) troppo leggeri per bruciare l'idrogeno, sono stati rilevati [126], ma la loro abbondanza relativa è messa in discussione sia in base a considerazioni sulla funzione di massa iniziale (IMF) [64], sia in base alle osservazioni di *microlensing* gravitazionale discusse più diffusamente in seguito.

1.5 Teorie alternative della gravitazione

Un approccio del tutto differente al problema della materia oscura, piuttosto, alla soluzione dei problemi che ne suggeriscono l'esistenza, può essere dato cercando, invece della materia oscura nell'ambito della formulazione della teoria di Einstein, che si riduce a livello galattico alla teoria classica di Newton, una adeguata riformulazione della teoria della gravitazione che consenta poi una soddisfacente interpretazione delle evidenze osservative (e.g. [139]). E' stato del resto recentemente osservato che i nuovi dati sulla radiazione di fondo cosmico sono compatibili con un universo puramente barionico, con $\Omega_m = \Omega_b$, e quindi dove la densità di energia sarebbe dominata dal termine associato alla costante cosmologica $\Omega_\Lambda \approx 1$ [108].

La legge di Newton, alla base delle deduzioni sulla necessità dell'introduzione di una componente non luminosa di materia negli aloni galattici *non* è stata, di fatto, verificata oltre i confini del Sistema Solare. Esistono del resto alcune osservazioni, al di fuori del Sistema Solare, che mostrano comportamenti anomali rispetto a quello aspettato [8].

Modificazioni alla teoria di Newton, che conserverebbe la sua validità solo per piccoli valori delle distanze, sono già state proposte (MOND, *Modified Newton Dynamics*), sviluppate e discusse [109, 110, 111, 105]. Modificazioni alla formula dell'accelerazione di gravità come quella proposta in [136]

$$g = \frac{GM}{R^2} + \frac{(GMa_0)^{1/2}}{R}, \quad (1.12)$$

attraverso l'introduzione di una costante di accelerazione a_0 con valori $a_0 \sim 10^{-8} \text{ cm/s}^2$ tali che sarebbero effettive a partire dalla scala $\sim 10 \text{ kpc}$, portano di fatto alla "soluzione" dei problemi osservati a livello delle curve di rotazione nelle galassie (e.g. [21]), utilizzando come unico parametro il rapporto M/L del

¹ Con un leggero abuso di linguaggio ci si riferisce a questi anche nel caso in cui non siano effettivamente oggetti dell'alone.

bulge galattico, lasciando però irrisolti molti problemi (non ultima, una coerente formulazione covariante [135]).

Esistono altre motivazioni, legate piuttosto all'evoluzione dell'universo nei primissimi istanti dell'espansione durante la fase inflazionaria, che suggeriscono la ricerca di strade alternative. La formulazione delle equazioni (del secondo ordine) della Relatività Generale può essere dedotta a partire dalla minimizzazione rispetto al tensore metrico di componenti g_{ik} ² dell'azione

$$\mathcal{A} = \int d^4x \sqrt{-g} [\kappa R - \mathcal{L}_m] , \quad (1.13)$$

dove R è lo scalare di curvatura ottenuto per contrazione dal tensore di Riemann che caratterizza la curvatura, κ una costante che fissa le unità della massa (generalmente espressa in termini della costante della gravitazione G di Newton e della velocità della luce), \mathcal{L}_m la lagrangiana della materia. Si possono allora formulare teorie di ordine superiore [143], o teorie con un campo scalare [97] rilassando le ipotesi di linearità in R e di accoppiamento minimo nella (1.13).

Un'estensione della teoria di Einstein può essere fatta introducendo un campo scalare φ accoppiato con la gravitazione. Riguardo a questo punto esiste un dibattito sul tipo di accoppiamento, *minimale* o *nonminimale* con importanti conseguenze [102, 36, 37]. L'azione, per un accoppiamento *nonminimale*, si scrive in questo caso come

$$\mathcal{A} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[F(\varphi) R + \frac{1}{2} g^{ik} \varphi_{;i} \varphi_{;k} - V(\varphi) + \mathcal{L}_m \right] , \quad (1.14)$$

dove $;$ indica l'operazione di derivazione covariante, che in ogni modo, per un campo scalare, si riduce alla derivazione parziale ordinaria. $V(\varphi)$ è un termine di potenziale che svolge il ruolo di una costante cosmologica efficace. In questo caso è possibile mostrare una dipendenza esplicita nel limite newtoniano dal parametro di accoppiamento della teoria [29].

Teorie di questo tipo *non* riproducono la teoria di Newton nell'appropriato limite di campo debole, piuttosto, la generalizzano (e.g. correzioni alla Yukawa per teorie R^2 [145]). Modificazioni che si riallacciano a quelle proposte nell'ambito delle teorie MOND [136]. Altri autori [106, 18] hanno poi mostrato come una teoria conforme della gravità, contenendo simili correzioni nel limite di campo debole, potrebbe (di nuovo) spiegare il problema della materia “mancante” senza il ricorso alla materia “oscura”.

Eventuali conferme su larga scala potrebbero del resto essere trovate attraverso studi legati agli stessi fenomeni di *lensing* gravitazionale [142], piuttosto che dallo studio delle eventuali variazioni della “costante” di accoppiamento di Newton [96].

1.6 Il *microlensing* gravitazionale e la ricerca della materia oscura

L'effetto della deviazione dei raggi luminosi in presenza di un campo gravitazionale (e.g. [138]) ha svolto, storicamente, un ruolo rilevante nella formulazione e poi nella conferma sperimentale della teoria della Relatività Generale di Einstein (l'idea della deviazione della *luce* in presenza di un corpo massivo era già stata avanzata da Newton e Laplace). Lo stesso Einstein considerò (nel 1936, [56]) in particolare l'effetto di *lente* che può essere svolto da una qualsiasi distribuzione di massa che si trovi sulla linea di vista tra un osservatore e una sorgente data. L'aspetto rilevante, nel contesto della ricerca della materia oscura, è proprio questo. Una qualsiasi distribuzione di massa (la *lente*) determina la traiettoria dei raggi luminosi che si trovino a passare nelle sue immediate vicinanze, dove cioè il campo gravitazionale che genera è più forte. Lo studio di questo effetto permette di fare deduzioni sullo stesso campo gravitazionale, quindi sulla distribuzione di massa, della stessa lente.

La materia oscura si manifesta solo attraverso il suo effetto gravitazionale, lo stesso che il *lensing* permette di studiare, che diventa uno strumento ideale per la sua rivelazione (nel 1937 Zwicky, [165, 166], propose di sfruttare questo effetto considerando come lente una galassia, proprio con l'obiettivo di studiarne una eventuale componente *oscura*, un'idea rimasta a lungo irrealizzata). Abbiamo già ricordato come questo fenomeno sia sfruttato con successo sulla scala degli ammassi di galassie, dove questi svolgono il ruolo della lente: le sorgenti sono galassie o quasars sullo sfondo ad alto redshift (*weak lensing*). Nell'ambito della ricerca della materia oscura come componente degli aloni galattici, la proposta di

²i,k=0,1,2,3.

sfruttare il *lensing* gravitazionale, in un limite particolare, cosiddetto *microlensing*, è stata avanzata per la prima volta nel 1986 [114], e il MACHO svolge qui il ruolo della lente.

Nell'approssimazione di “lente sottile”, in cui lavoriamo, tutta l'azione della deflessione, determinata da una disomogeneità del campo gravitazionale concentrata in un punto, ovvero in un piano, tra la sorgente e l'osservatore, è considerata succedere a una singola distanza. Il campo gravitazionale di una lente, nell'approssimazione di geometria sferica (metrica di *Schwarschild*), nel limite di *campo debole*, si manifesta determinando un caratteristico angolo di deviazione della luce dipendente dalla lente (dalla sua *massa*, M) e dal parametro di impatto (ξ) del raggio luminoso (in questa approssimazione considerato molto maggiore del raggio di Schwarschild della sorgente), cioè

$$\tilde{\alpha} = \frac{4GM}{\xi c^2}, \quad (1.15)$$

che è la deviazione della luce osservabile attraverso la crezione di immagini della sorgente nella direzione individuata dallo stesso angolo di deviazione.

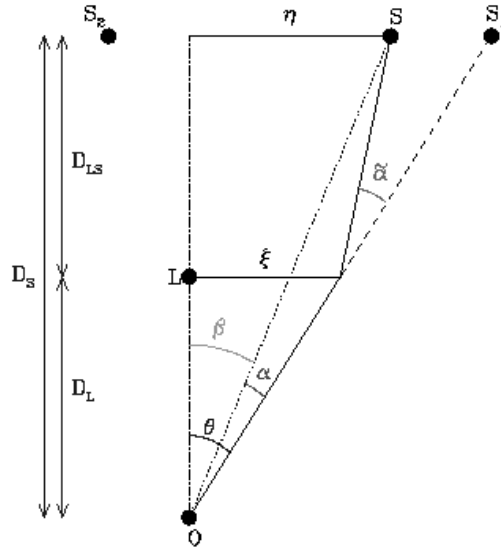


Figura 1.2: Rappresentazione schematica della geometria caratteristica di un evento di *lensing*. Quando le due immagini virtuali della sorgente S , S_1 e S_2 , non possono essere risolte si parla allora di *microlensing*.

Nell'approssimazione più semplice, sorgente e lente *puntiformi*, date le equazioni della lente (determinate dalla geometria rappresentata in Fig. 1.2, dove O, L, S stanno rispettivamente per *Osservatore*, *Lente* e *Sorgente* e D_L , D_{LS} e D_S sono le distanze relative), si formano due immagini della sorgente (S_1 e S_2). La loro posizione è determinata dalla geometria del problema (angoli e distanze relative), secondo l'equazione (vedi la Fig. 1.2)

$$\theta D_S = \beta D_S + \tilde{\alpha} D_{LS}. \quad (1.16)$$

Nel caso di perfetto allineamento tra osservatore, lente e sorgente, questa appare proiettata sul piano della lente su di un cerchio di raggio R_E (*raggio di Einstein*), dato dall'espressione

$$R_E = \sqrt{\frac{4GM}{\xi c^2} \cdot \frac{D_L D_{LS}}{D_S}}, \quad (1.17)$$

lunghezza caratteristica della “zona di influenza” della lente. Si definisce corrispondentemente l'*angolo di Einstein* come θ_E

$$\theta_E \equiv \frac{R_E}{D_L} = \sqrt{\frac{4GM}{\xi c^2} \cdot \frac{D_{LS}}{D_D D_S}}. \quad (1.18)$$

Per una sorgente a $\sim 50 \text{ kpc}$ e una lente a $\sim 10 \text{ kpc}$ (distanze tipiche per una sorgente situata in una *Nube di Magellano* e una lente nell'alone della *Via Lattea*), risulta $R_E \approx 8\sqrt{M/M_\odot} \text{ AU}$ e $\theta_E \sim 10^{-3}$ arcsec. In simili condizioni lo sdoppiamento delle immagini *non* è osservabile, questo a causa della tipica risoluzione dei telescopi terrestri, θ_{res} . L'ineguaglianza $\theta_E \ll \theta_{res}$ giustifica il termine *micro* applicato al *lensing* (da cui il termine *microlensing*, e.g. [130]). Una sorgente tipica a $\sim 50 \text{ kpc}$ ha un raggio angolare di $\theta_{sorgente} \sim 10^{-6}$ arcsec, per cui $\theta_{sorgente} \ll \theta_E$ e l'ipotesi di sorgente *puntiforme* è giustificata. Le due immagini non essendo distinguibili tra di loro, si assiste a un effetto di *amplificazione* della luminosità della sorgente data dal rapporto tra gli angoli solidi dell'immagine e della sorgente

$$\mu = \frac{\theta}{\beta} \frac{d\theta}{d\beta}. \quad (1.19)$$

In questo caso l'amplificazione totale ($= (|\mu_1| + |\mu_2|) > 1$) è data da [125]

$$A = \frac{2 + u^2}{u\sqrt{4 + u^2}}, \quad (1.20)$$

dove u è il parametro di impatto normalizzato sul *raggio di Einstein*, $u \equiv \beta/\theta_E$.

Quello che rende possibile lo studio di questo effetto è il suo carattere intrinsecamente *temporale* determinato dalle condizioni di moto relativo in cui si trovano l'osservatore, la lente e la sorgente. Nell'ipotesi ragionevole di moto *uniforme* della lente nel potenziale gravitazionale della galassia risulta

$$u(t) = \sqrt{\left(\frac{t - t_0}{t_E}\right)^2 + u_{min}^2}, \quad (1.21)$$

dove u_{min} è la distanza minima tra lente e sorgente, raggiunta nell'istante t_0 , mentre il *tempo di Einstein* t_E è quello necessario alla lente per percorrere il *raggio di Einstein* data la sua velocità trasversale v_L relativa

$$t_E = \frac{R_E}{v_L} \approx 80 \sqrt{\frac{M}{M_\odot}} \sqrt{\frac{D_L}{10 \text{ kpc}}} \sqrt{1 - \frac{D_L}{D_S}} \left(\frac{v_L}{200 \text{ km/s}}\right)^{-1} \text{ giorni}. \quad (1.22)$$

In particolare va osservata la dipendenza dalla massa della lente $t_E \propto \sqrt{M}$.

L'amplificazione (1.20), $A = A(t)$ mostra allora una caratteristica forma a campana (Fig. 1.3), simmetrica rispetto all'istante di massima amplificazione t_0 . L'amplificazione massima cresce al diminuire del parametro d'impatto minimo u_{min} . In particolare per $u_{min} = 1$ risulta $A_{max} = 1.34$. Il *raggio di Einstein*, grandezza tipica della lente, fissa dunque la durata caratteristica di un evento di *microlensing*.

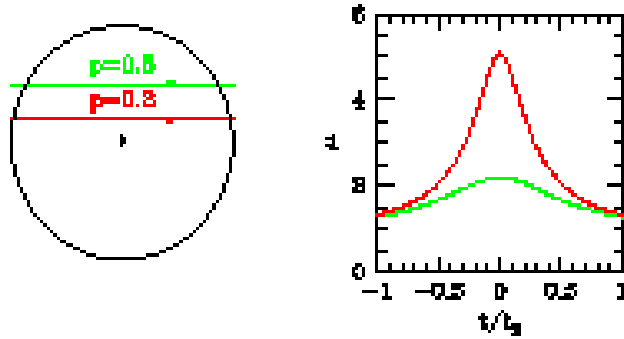


Figura 1.3: La caratteristica forma a campana di un evento nell'approssimazione sorgente-lente puntiforme, moto uniforme della lente (la cosiddetta *curva di Paczyński*).

L'amplificazione caratteristica di un evento di *microlensing* dipende dunque da 3 parametri, il parametro di impatto, l'istante di massima amplificazione e il *tempo di Einstein*. I primi due danno una informazione sulla geometria dell'evento, inessenziale ai fini della caratterizzazione fisica della lente, mentre l'informazione rilevante (la *massa* della lente) è contenuta nel terzo, dove è però mescolata con altre informazioni sulla geometria dell'evento, distanze relative caratteristiche e velocità della lente.

L'analisi dei dati che affrontiamo nei capitoli successivi si concentra sullo studio dell'amplificazione. Nella descrizione di un evento di *microlensing* altre due grandezze entrano allora in gioco, il fondo di luminosità da cui emerge l'amplificazione e il flusso della sorgente a riposo. Questi parametri vanno ulteriormente a complicare la caratterizzazione degli eventi.

Una quantità significativa anche da un punto di vista osservativo è la *profondità ottica* ($\equiv \tau$). Questa è la probabilità istantanea che una data sorgente venga significativamente amplificata ($u(t) \leq 1$). Il *raggio di Einstein*, associato alla lente, individua il cosiddetto “tubo di *microlensing*” alle cui (ideali) estremità ci sono l'osservatore e la lente. Al suo interno una lente di massa data determina un'amplificazione superiore a 1.34 corrispondente a 0.3 magnitudini. La profondità ottica, $x \equiv D_L/D_S \in (0, 1)$ è la distanza normalizzata della lente, corrisponde al numero di lenti presenti in questo tubo in ogni istante

$$\tau \equiv \int_0^{D_S} n_L(D_L) \pi R_E^2(D_L) d(D_L) = \int_0^1 \frac{4\pi G}{c^2} \rho_L(x) D_S^2 x(1-x) dx, \quad (1.23)$$

dove $\rho_L(n_L)$ è la densità di massa (numerica) delle lenti. La profondità ottica non dipende dunque dalla massa delle singole lenti ma solo dal profilo di densità. La stima teorica della profondità ottica necessita quindi la specificazione di un modello per l'alone. Nel caso più semplice, considerando l'alone come una sfera omogenea con densità costante interamente costituito da MACHO, risulta $\tau = GM/2c^2R$. L'ordine di grandezza caratteristico è allora $\tau \approx (v/c)^2 \approx 10^{-6}$, dove v è la velocità di rotazione tipica $\sim 200 \text{ km/s}$. In ogni istante, su 10 milioni di stelle, solamente una subisce un effetto di *microlensing* osservabile.

Abbiamo riassunto alcuni elementi della teoria del *microlensing*, mettendo in evidenza la possibilità di utilizzare questo effetto per la ricerca di MACHOs negli aloni galattici. In una ricerca sperimentale l'effetto di *microlensing* va distinto da quello di altre sorgenti intrinsecamente variabili. Come primo elemento si considera la *forma* dell'amplificazione (1.20). La piccolissima probabilità associata agli eventi di *microlensing*, espressa dal valore della profondità ottica, permette di caratterizzarli ulteriormente secondo un criterio di *unicità* della variazione di luminosità. Infine, essendo la deviazione della luce in un campo gravitazionale un effetto puramente *geometrico*, in un evento di *microlensing* la variazione di luminosità della sorgente deve essere *indipendente* dalla lunghezza d'onda, ovvero un evento di *microlensing* è *acromatico*.

Una buona statistica (un elevato numero di eventi rilevati) permette ulteriori caratterizzazioni. Le sorgenti dovrebbero essere distribuite nel diagramma colore-magnitudine proporzionalmente al numero totale di stelle. Il parametro minimo di impatto dovrebbe essere distribuito in modo uniforme, tra 0 e un limite superiore (< 1) fissato dalla sensibilità dell'esperimento.

Osserviamo che sono previste teoricamente numerose eccezioni alla semplice forma dell'amplificazione (1.20), caratteristica della geometria con lente e sorgente puntiformi, eccezioni che danno luogo ad amplificazioni differenti che sono importanti in quanto permettono, in linea di principio, di rompere la degenerazione dei parametri intrinseca a questa descrizione. Citiamo a titolo di esempio gli effetti di sorgente finita (e.g. [69, 158]), di lente binaria (e.g. [107]), di sorgente binaria (e.g. [75]) di parallasse [68]. Un fastidioso effetto di contaminazione del segnale, con eventuali effetti *cromatici*, può inoltre venire dal cosiddetto *blending*, quando al segnale dell'unica sorgente amplificata si sovrappone quello di altre stelle confuse con questa.

Data la caratterizzazione degli eventi di *microlensing*, un progetto di ricerca osservativo efficace deve essere dotato di alcuni requisiti di base. Occorre monitorare un enorme campione di potenziali sorgenti (da fissare in accordo alle stime della profondità ottica). Di queste vanno seguite regolarmente (la frequenza fissa la durata minima degli eventi rilevabili) e per un lungo periodo di tempo (lungo rispetto ai tempi caratteristici delle altre sorgenti variabili) le eventuali variazioni di luminosità. I dati vanno acquisiti in due intervalli di lunghezze d'onda distinti (questo soprattutto per lo studio dell'acromaticità, ma anche per caratterizzare la sorgente secondo il suo *colore*).

Il *microlensing* si presta naturalmente a studi differenti da quelli rivolti alla rivelazione di MACHOs, dove un inevitabile prodotto secondario è quello costituito dallo studio delle altre sorgenti variabili (e.g. [6]). Un campo di ricerca esplorabile, per esempio, è quello del rilevamento di *pianeti* (in particolare quelli di massa gioviana, e.g. [132]).

1.6.1 I risultati sperimentali nella Galassia

Come ricordato, la proposta di sfruttare il *microlensing* gravitazionale come strumento di indagine della composizione degli aloni galattici è stata formulata nel 1986 da B. Paczyński [114]. In seguito sono stata comprese anche le possibilità offerte da una ricerca in direzione del Centro Galattico [115, 74].

Per lo studio dell'alone della Galassia tali campi sono naturalmente offerti dalle Nubi di Magellano, LMC e SMC (*Large e Small Magellanic Cloud*), situati a una distanza di ~ 50 e 60 kpc rispettivamente. Due collaborazioni, EROS (*Expérience pour la Recherche d'Objets Sombres*) e MACHO (*MASSive Compact Halo Objects*) operano dal 1992 alla ricerca di eventi di *microlensing* osservando tali campi ([12] e [4] per i primi candidati osservati).

Come detto, una direzione alternativa è data dal *bulge* della Galassia (distante dal nostro punto di osservazione ~ 8.5 kpc), verso cui si sono rivolte anche altre collaborazioni, tra le quali OGLE (*THE OPTICAL GRAVITATIONAL LENSING EXPERIMENT*, primi candidati riportati in [153]) e DUO (*Disk Unseen Objects*, [2, 3]). In questa direzione sono rilevanti gli effetti di *self-lensing* di stelle all'interno del *bulge* [94]. I recenti risultati di queste osservazioni della collaborazione MACHO [5], su un campione di 99 eventi per 17×10^6 di sorgenti monitorate, danno una stima della profondità ottica di $\tau \sim 2.91 \times 10^{-6}$, significativamente maggiore di quella prevista dagli attuali modelli della Galassia [79]. Non sono del resto rilevate, compatibilmente con la distribuzione dei tempi caratteristici degli eventi osservati (dove comunque i dati non consentono il rilevamento di eventi con tempi caratteristici inferiori ad alcuni giorni), evidenze della presenza di una importante popolazione di nane brune in questa direzione. L'importanza di queste osservazioni (per le collaborazioni EROS e OGLE, [154, 11]) è legata d'altra parte alla formulazione dell'ipotesi di una struttura *barrata* per la Galassia [163]. Del resto, mancano al momento evidenze sufficienti che tale barra sia sufficientemente massiva per spiegare la profondità ottica osservata.

Altri possibili campi utilizzabili come obiettivo per una ricerca di eventi di *microlensing* (che permetterebbero tra l'altro di esplorare l'alone della Galassia lungo diverse linee di vista) sono gli *ammassi globulari* [86].

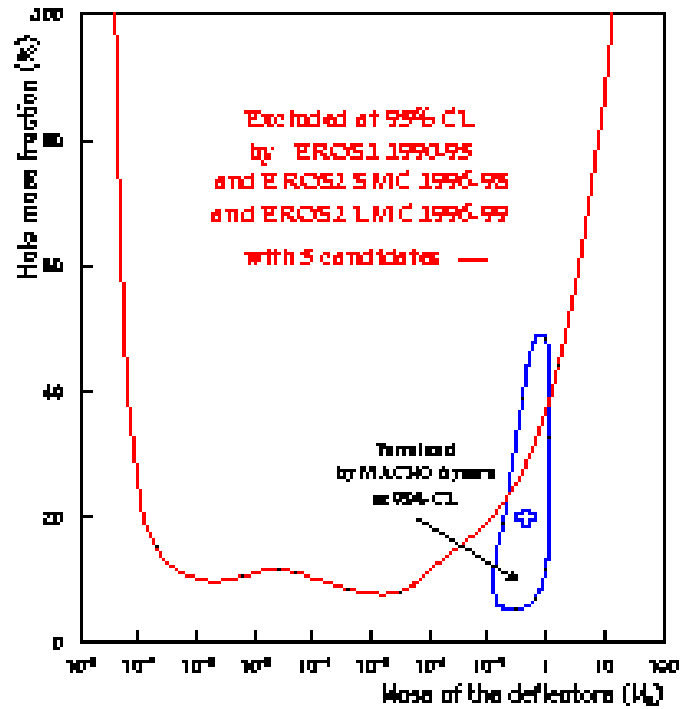


Figura 1.4: I risultati delle collaborazioni EROS e MACHO sulla presenza di oggetti compatti nella Galassia, in particolare i contorni della frazione di alone in funzione della massa dei MACHOs [99], in rosso *esclusa* dalla collaborazione EROS, in blu *permessa* dalla collaborazione MACHO.

Circa la ricerca di MACHOs in direzione dell'alone della Galassia, ricordiamo le più importanti conclusioni, dai più recenti risultati, delineate dalle due esperienze citate. I risultati delle due collaborazioni sono statisticamente consistenti tra di loro (Fig. 1.4). In questo senso, il dato osservativo forse più rilevante è l'assenza di eventi di breve durata, che implica l'esclusione della possibilità di una frazione importante dell'alone costituita da oggetti di piccola massa (ricordiamo il limite significativo $\sim 0.08 M_{\odot}$).

per quanto riguarda la distinzione tra oggetti stellari e non).

In particolare i dati di EROS [99], sensibile a oggetti in un intervallo di massa tra 10^{-7} e $10 M_{\odot}$, con 4 candidati (con $t_E \in [24 \div 44]$ giorni) su 25 milioni di stelle osservate in 3 anni in direzione della Grande Nube di Magellano (EROSII), 1 candidato nella stessa direzione rilevato nel corso di una prima campagna di osservazioni (EROSI) (con ~ 30 eventi aspettati in questa direzione per un alone oscuro sferico interamente costituito da MACHOs di massa di $0.4 M_{\odot}$) e 1 candidato osservato in direzione della Piccola Nube di Magellano ([1], dove in questo caso esistono forti indicazioni che si tratti di un evento di *self-lensing*, [116]), permettono di escludere che più del 40% dell'alone sia costituito da oggetti con massa nell'intervallo $10^{-7} \div 1 M_{\odot}$ (il limite superiore è del 12% nell'intervallo fino a $\sim 10^{-2} M_{\odot}$). Alcune curve di luce dei candidati sono riportate in Fig. 1.5.

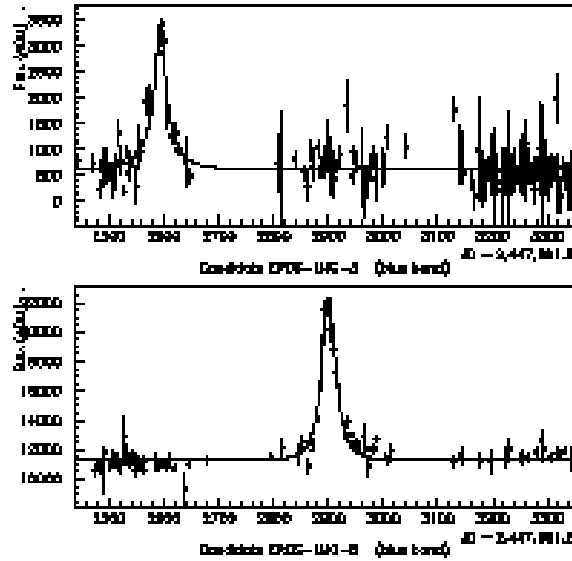


Figura 1.5: Curve di luce della collaborazione EROS riconosciute come segnali di eventi di *microlensing* [99].

La collaborazione MACHO [7] riporta, come risultato di una campagna di osservazioni di 5.7 anni, e ~ 12 milioni di stelle monitorate in direzione di LMC, 13-17 eventi di *microlensing* (durata caratteristica compresa nell'intervallo $[34 \div 230]$ giorni), cifra significativamente più elevata dei 2 – 4 eventi aspettati per fenomeni di *microlensing* con lenti date da stelle di popolazioni note. La profondità ottica stimata in questa direzione per eventi di durata tra 2 e 400 giorni è di $\tau \sim 1.2 \times 10^{-7}$. I risultati, in particolare la distribuzione spaziale degli eventi, è ritenuta essere incompatibile con ipotesi di *self-lensing* all'interno del disco di LMC, ma non, per esempio, con quella di un alone proprio alla stessa Nube di Magellano. Salvo alcuni modelli estremi di alone viene escluso che questo sia interamente costituito da MACHOs al 95% *C.L.*. Interpretando gli eventi come dovuti a una popolazione di MACHOs nell'alone della Galassia, viene dedotto che una frazione del 20% \div 30% è costituito da MACHOs nell'intervallo di massa $0.15 \div 0.9 M_{\odot}$ (dipendendo questo dal modello di alone), per una massa totale stimata di MACHOs fino a ~ 50 kpc di $\sim 9 \times 10^{10} M_{\odot}$ (essendo questo risultato *indipendente* dal modello di alone). Alcune curve di luce della collaborazione MACHO sono riportate in Ref. 1.6.

Il risultato comune delle due esperienze dunque è quello di una frazione oscura di alone $f \sim 0.2 \div 0.3$ costituita da MACHOs di massa $M \sim 0.5 \div 1 M_{\odot}$. Riguardo questo, l'importante differenza è che mentre la collaborazione EROS deduce dai dati (con una peggiore statistica), solamente un limite superiore alla frazione di alone costituita da MACHOs, la collaborazione MACHO interpreta i dati come un segnale effettivamente osservato e da questo deduce la frazione di alone costituita da MACHOs.

Altre differenze tra le due esperienze sono che EROS copre, con un peggior campionamento temporale, una più vasta regione di LMC. Il fatto di osservare campi stellari meno densi, del resto, diminuisce i problemi di *blending*. Nel caso di EROS, infine, dato il più ampio campo di osservazione, le stime sul numero di eventi aspettati sono meno contaminate dai problemi di *self-lensing*.

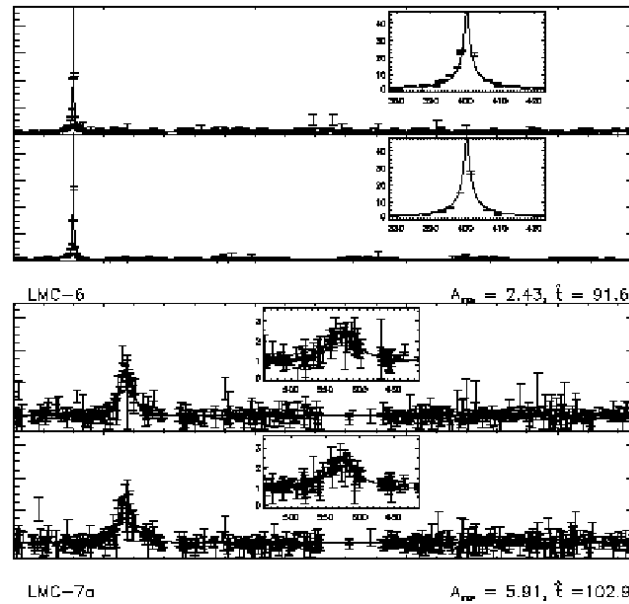


Figura 1.6: Due curve di luce della collaborazione MACHO riconosciute come segnali di eventi di *microlensing*.

A complemento di questa discussione si possono fare alcune considerazioni [92]. E' necessario ricordare la dipendenza di gran parte dei risultati dal particolare modello di alone della Galassia, sferico piuttosto che appiattito, come dalla distribuzione (in particolare dalla isotropia), delle velocità dei MACHOs. Inoltre, il risultato dell'esclusione delle *nane brune* come componente importante dell'alone sembra comunque non conciliabile con i dati attuali nella misura in cui apre un dibattito (non concluso) sulla natura degli oggetti oscuri osservati. I dati sembrano piuttosto indicare l'intervallo di massa caratteristico delle *nane bianche*. Al riguardo abbiamo già ricordato le osservazioni dirette di alcuni oggetti di questo tipo, che sembrano convergere con i risultati del *microlensing*, ma come diversi problemi si scontrino con un'interpretazione di questo genere. Altre proposte indicano nelle cosiddette *nane beige* la possibile soluzione: queste sono stelle di massa fino a $0.3 M_{\odot}$ dove però non è stata innescata la fusione dell'idrogeno [81]. A prescindere da questo aspetto, va comunque osservato come i risultati del *microlensing* insieme agli altri limiti dedotti in ambito cosmologico (questi possono o meno, in modo pertinente, essere utilizzati per deduzioni circa la composizione degli aloni galattici), sembrano indicare come la componente barionica degli aloni sia di molto inferiore a quella necessaria per spiegare il loro contenuto di materia oscura.

Il segnale osservato si presta però anche ad altre interpretazioni. La profondità ottica osservata va confrontata con quella teorica dove vanno inclusi anche i contributi delle popolazioni stellari note, in particolare del disco. Si può cioè immaginare di modellizzare il disco in modo tale da poter spiegare gli eventi osservati senza la necessità di ricorrere all'ipotesi della materia oscura (sono questi i modelli di disco "spesso", con un scala di altezza di $\sim 3kpc$ in contrasto con i modelli correnti per cui la sua estensione verticale è dell'ordine di $\sim 10^2 pc$) (e.g. [77, 104]), piuttosto che modelli di un disco deformato in direzione delle Nubi di Magellano [59]. Un'altra possibilità è che le stesse lenti, oltre alle sorgenti, facciano parte delle Nubi di Magellano (scenari di *self-lensing* già evocati e proposti in [133]), ovvero l'esistenza di un contributo importante di un (ipotetico) alone oscuro delle stesse Nubi [90]. Esistono inoltre proposizioni [162] come argomentazioni contrarie [71] per cui i risultati possono essere spiegati con la presenza di "detriti" presenti lungo la linea di vista in direzione delle Nubi, associabili a questi piuttosto che ad altre strutture ormai distrutte.

In conclusione, gli esperimenti in direzione delle Nubi di Magellano lasciano aperti diversi problemi. Segnali di *microlensing* sono stati osservati, rimane ancora da discutere la questione se siano stati causati da MACHOs, candidati naturali per il ruolo di materia oscura negli aloni galattici, o meno. Altri scenari plausibili, del resto, richiedono tutti una profonda revisione della comprensione della struttura della Galassia.

Osservazioni in direzione della galassia di Andromeda, M31 (come quelle che vengono discusse in dettaglio in seguito), aprono, in questa prospettiva, diverse nuove possibilità.

1.6.2 *Microlensing* in direzione della galassia di Andromeda

Un risultato acquisito del *microlensing* gravitazionale è la sua capacità di indagine della materia oscura sotto forma di oggetti compatti. Abbiamo del resto evidenziato risultati e problemi lasciati aperti dalle esperienze rivolte alla ricerca di MACHOs in direzione delle Nubi di Magellano.

Diviene interessante, allora, considerare possibili obiettivi alternativi. Una scelta “naturale” diviene allora la galassia di Andromeda, M31 [16, 43], la più vicina del suo genere alla nostra. Si tratta di una galassia a spirale, di dimensioni e massa comparabili a quella della Via Lattea, essendo queste due galassie a spirale i membri principali, come dimensioni, del Gruppo Locale. Riguardo la massa, essendo questo un aspetto fondamentale nell’ambito della ricerca della materia oscura, ricordiamo che recenti ricerche [58, 157] tendono piuttosto ad attribuire a M31 una massa perfino minore di quella della Via Lattea.

M31 si trova a una distanza di ~ 700 kpc dalla Via Lattea, distanza molto maggiore da quella che divide il nostro punto di osservazione dalle Nubi di Magellano. La differenza fondamentale tra le due ricerche è in rapporto a questo dato. Le sorgenti potenziali nelle Nubi di Magellano sono oggetti *risolti*, le sorgenti in M31, al contrario, sono oggetti *non risolti*, ovvero indistinguibili dal fondo in assenza di amplificazione (sorgente a *riposo*). Questo aspetto ha sollecitato l’elaborazione di metodi di analisi alternativa. Mentre nel caso delle Nubi di Magellano si studiano le variazioni di luminosità delle sorgenti risolte, in direzione di M31 l’idea è piuttosto quella di analizzare le variazioni di luminosità di ogni singolo elemento di immagine (i *pixels* nel caso delle camere CCD normalmente utilizzate), essendo però la mancanza dell’informazione sul flusso della sorgente a riposo uno dei maggiori problemi intrinseci al metodo. In prima approssimazione la galassia appare dunque uniforme, e ogni pixel raccoglie il flusso di diverse migliaia di stelle. La perdita della conoscenza diretta della sorgente dell’amplificazione viene compensata dall’ampliamento del numero delle sorgenti potenziali. Questo punto viene discusso più diffusamente in seguito.

Altri diversi aspetti vanno sottolineati come caratteristici in una ricerca di questo tipo rispetto a quelle compiute nell’ambito della Galassia. Come del resto prova lo studio delle curve di rotazione, M31 è dotata di un proprio alone oscuro. Questo permette quindi lo studio di un alone *altro* rispetto a quello della Galassia, studio che può del resto essere compiuto lungo diverse linee di vista. Riguardo questo punto, naturalmente le esperienze in direzione delle Nubi di Magellano sono “perdenti” in quanto limitate intrinsecamente a due sole direzioni vicine di osservazione. Un possibile problema è legato alla contaminazione di segnali di MACHOs appartenenti all’alone della Galassia piuttosto che a quello di M31, anche se i primi sono previsti essere molto meno numerosi dei secondi. A favore della scelta di M31 va invece il previsto *gradiente* nella profondità ottica. Infatti, a causa della posizione inclinata del disco di M31 rispetto alla nostra linea di vista una ricerca verso M31 offre un test unico capace di discriminare efficacemente eventi di *microlensing* da altri segnali variabili. Mentre questi sono aspettati essere distribuiti in maniera simmetrica, la probabilità di osservare eventi di *microlensing* è prevista essere maggiore in direzione del lato “lontano” del disco in quanto questo si trova dietro una porzione maggiore di alone [43, 85, 87] rispetto a osservazioni nel lato “vicino”. Lo stesso alone di M31, e l’elevato numero di sorgenti in M31, offre, rispetto alle Nubi di Magellano, la possibilità di osservare un numero significativamente maggiore di eventi di *microlensing*. Un altro aspetto legato alla ricerca in questa direzione è l’importanza relativamente maggiore assunta dagli effetti di sorgente finita [16].

Diverse esperienze (vedi la Fig. 1.7) hanno intrapreso osservazioni in questo senso. La collaborazione AGAPE[16], di cui discutiamo più diffusamente in seguito e che ha già presentato rilevanti risultati, Columbia-VATT (ora MEGA, *Microlensing Exploration of the Galaxy and Andromeda* [43, 44, 78]), e le nuove collaborazioni POINT-AGAPE (*Pixel Observation on Isaac Newton Telescope-AGAPE*, [91]), che ha già iniziato osservazioni e analisi dei dati, e SLOTT-AGAPE (*Systematic Lensing Observations at Topco Telescop-AGAPE*, [24]).

I dati analizzati in questo lavoro, i dati “MDM” (acronimo che deriviamo dal nome dell’osservatorio dove sorge il telescopio utilizzato, Michigan-Dartmouth-MIT), sono condivisi dalla collaborazione SLOTT-AGAPE con la collaborazione MEGA.

Come già accennato l’aspetto fondamentale della ricerca in direzione di M31 è legato alla necessità di studiare variazioni di luminosità di sorgenti non risolte quando a riposo [70]. Due differenti metodi per studiare tali variazioni di luminosità sono stati proposti e quindi implementati. Il *metodo dei pixels* (o *pixel lensing*), caratteristico della collaborazione AGAPE, e un metodo che si basa sulla *differenza delle*

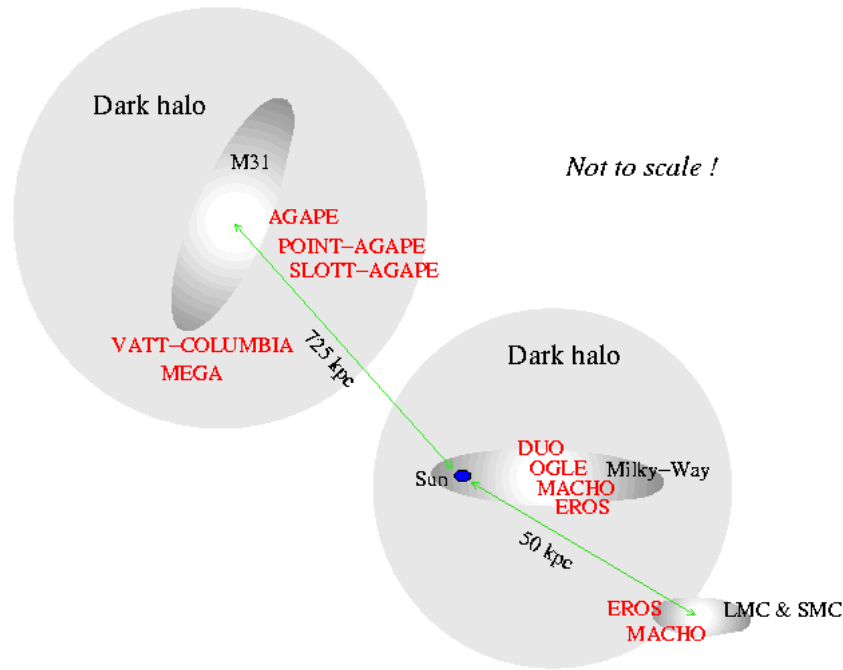


Figura 1.7: Immagine schematica della Galassia e di M31: sono indicati i nomi e le direzioni di ricerca di eventi di *microlensing* delle principali collaborazioni.

immagini (DIA), proprio della collaborazione MEGA. Discutiamo ora del primo, in quanto è il metodo utilizzato per l'analisi dei dati a nostra disposizione discussa nei capitoli successivi. Notiamo, del resto, che gli stessi risultati più recenti della collaborazione MEGA ([45], dove in particolare vengono riportate 8 curve di luce compatibili con un evento di *microlensing*) sono ottenuti da un'analisi, indipendente, effettuata in parte sullo stesso campione di dati.

Accenniamo infine al fatto che la già sottolineata impossibilità di accedere, dai soli dati a disposizione, all'informazione del flusso della sorgente a riposo preclude la possibilità di stimare direttamente il *tempo di Einstein* degli eventuali eventi selezionati e quindi la profondità ottica. Per aggirare questo ostacolo, oltre naturalmente alla possibilità offerta, per esempio, dalle immagini di archivio HST, è possibile ricorrere ad adeguati metodi statistici adattati alle esigenze del problema [67, 17].

1.6.3 Il *pixel lensing* e l'esperienza di AGAPE

Consideriamo più in dettaglio il *metodo dei pixels*, e ricordiamo i risultati principali ottenuti dalla collaborazione AGAPE [16, 9].

Teoria del *pixel lensing*

In un'immagine della galassia di Andromeda, ogni elemento, il pixel, raccoglie il flusso luminoso di diverse migliaia di sorgenti luminose presenti nella stessa galassia. Sono sorgenti *non risolte* nella misura in cui non è possibile caratterizzare individualmente il loro segnale. Il *pixel lensing* ha come obiettivo la rilevazione, e in un momento successivo la caratterizzazione, delle variazioni di luminosità di queste sorgenti. L'intero studio si basa su di un'analisi *temporale* del segnale ricevuto in ogni elemento di immagine (*curva di luce*).

Detto $\phi(t)$ il flusso ricevuto al tempo t in un pixel dato, questo si può esprimere nella somma di due contributi. Il flusso di fondo, ϕ_{fondo} , cui va aggiunta l'eventuale amplificazione $A(t)$ variabile nel tempo di una sorgente di flusso a riposo ϕ^* . Se

$$\phi_{fondo} = \phi^* + \phi_{resto}, \quad (1.24)$$

dove ϕ_{resto} è il flusso di tutte le altre stelle che contribuiscono alla luminosità del pixel, e dove

$$\phi^* \ll \phi_{fondo}, \quad (1.25)$$

e l'ultima espressione esprime proprio il senso da attribuire all'espressione "sorgente *non* risolta", risulta che

$$\phi_{pixel}(t) = \phi_{fondo} + (A(t) - 1) f_{seeing} \phi^*. \quad (1.26)$$

Il fattore f_{seeing} indica la *frazione di seeing* del segnale ricevuto che effettivamente viene raccolta nel pixel considerato.

Consideriamo il segnale di un oggetto astrofisico, una stella, ricevuto su una camera CCD in seguito al suo attraversamento dell'atmosfera. In origine il segnale può essere considerato *puntiforme*, ma in seguito a tale attraversamento si vede deformato e allargato. La distribuzione di fotoni ricevuti, bene approssimata da una funzione gaussiana in due dimensioni, viene detta la PSF (*Point Spread Function*) del segnale. I diversi fenomeni di turbolenza atmosferica, come anche le condizioni microclimatiche all'interno della cupola, determinano le dimensioni e la forma dell'allargamento. Con *seeing* si intende la larghezza della PSF, e, per estensione, le condizioni osservative che lo determinano. Globalmente su di una immagine si può, in linea di principio, calcolare una sorta di PSF media, e quindi il *seeing* dell'immagine. L'effetto del *seeing* è quindi quello di diluizione del segnale di un singolo oggetto ricevuto in un pixel in quelli circostanti. In un'immagine con "buon" *seeing* rispetto a una con "cattivo" *seeing* questo *disco di seeing* è rispettivamente più o meno esteso. Come ordine di grandezza tipico, le sue dimensioni sono di qualche arcosecondo, ovvero confrontabili (e leggermente maggiori) delle dimensioni tipiche di un pixel. Le condizioni del *seeing* (e così il fattore f_{seeing} nella (1.26)) variando nel tempo, e quindi da immagine a immagine, sono una fastidiosa sorgente di instabilità del segnale. Analizziamo in seguito la procedura seguita per *stabilizzare* il segnale lungo le curve di luce contro queste fluttuazioni, procedura che consente di considerare, al momento dell'analisi, $f_{seeing} = \text{costante}$. Il metodo originale implementato dalla collaborazione AGAPE [89, 100] permette questa riduzione senza fare ricorso al calcolo della PSF dell'immagine.

Come illustrato meglio in seguito, il primo passo in questa direzione è dato dalla sostituzione, nell'analisi del segnale, dell'informazione contenuta in un singolo pixel con quella contenuta nel "super-pixel" corrispondente, ovvero un quadrato di opportune dimensioni, centrato sul pixel, scelto in modo tale da contenere la maggior parte del *disco del seeing*, minimizzando in questo modo le instabilità associate alle sue variazioni. Un secondo passo è legato a uno studio *globale* dell'immagine.

Al segnale ricevuto è associato un rumore, $\sigma_{pixel}(t)$, dominato dal rumore statistico, in accordo con la statistica di Poisson dato dalla radice quadrata del numero di fotoni ricevuto.

Una variazione di luminosità può essere rilevata se l'amplificazione che la caratterizza è sufficientemente elevata, ovvero

$$\Delta\phi_{pixel} = (A - 1) f_{seeing} \phi^* > Q \sigma_{pixel}. \quad (1.27)$$

Da questa espressione si vede come la possibilità di rilevare una tale variazione dipenda da vari fattori. Uno di questi è il flusso della sorgente. E' più facile rilevare variazioni di luminosità dove la sorgente sia, per quanto non risolta, molto luminosa. Un altro elemento è l'amplificazione. E' più facile rilevare eventi ad *alta* amplificazione. Infine il rumore, o piuttosto il rapporto segnale su rumore, aumentando il quale (data la sua proporzionalità al numero di fotoni ricevuto, questo si ottiene allungando il tempo di esposizione), si aumenta la sensibilità per variazioni di luminosità meno forti.

Il *pixel lensing*, teoricamente sensibile alle variazioni di luminosità di tutte le sorgenti nel campo, di fatto è efficace per i soli eventi a più alta amplificazione piuttosto che a quelli dove la sorgente a riposo sia sufficientemente luminosa. E' possibile stimare essere $\sim 10^2$ il numero di sorgenti *per pixel* che, subito un effetto di amplificazione per un evento di *microlensing*, sono allora potenzialmente rilevabili [100].

Individuata una variazione di luminosità significativa (è nel rilevamento che risiede la peculiarità del metodo) si passa allo studio della *forma* della curva di luce così selezionata, potendo essere causa dell'amplificazione rilevata eventi di *microlensing* come stelle intrinsecamente *variabili*. Questo studio è finalizzato appunto alla distinzione dei differenti segnali.

La fase finale dell'analisi è la caratterizzazione dell'alone galattico in base ai risultati ottenuti.

La prima esperienza: AGAPE

La collaborazione AGAPE ha proposto, sviluppato e quindi utilizzato il *pixel lensing* per analizzare un insieme di dati originali [9]. Il risultato principale è stata la dimostrazione che questo metodo è realmente

efficace per la rilevazione e lo studio di variazioni di luminosità di sorgenti *non risolte*. Una curva di luce, un probabile evento di *microlensing*, è stata oggetto di uno studio particolare [10], e sono state inoltre selezionate diverse altre curve di luce compatibili con un evento di *microlensing* [100].

Ricordiamo ora brevemente questa esperienza, soprattutto per evidenziare, poi, quali sono le nuove opportunità offerte dall'analisi dei dati, oggetto di questo lavoro di ricerca. I dati sono stati raccolti con il telescopio TBL (*Telescope Bernard Lyot*) di 2 metri di diametro nel corso di 3 anni (1994-1996) di osservazioni. E' stata utilizzata una camera CCD di 1024×1024 pixel, ognuno di dimensioni angolari pari a $0.3''$. Il campo effettivo di visione è di circa $4.5' \times 4'$. Le osservazioni sono tutte concentrate attorno al *bulge* di M31. Sono osservati 6 campi, distribuiti 3 a 3 parallelamente all'asse maggiore della galassia. Le osservazioni sono state fatte utilizzando due filtri, centrati nella regione del rosso (Gunn-r) e del blu (Johnson B) dello spettro. Ci sono $\sim 80(20)$ immagini per campo nel rosso (blu), con tempo di esposizione di 20 (30) minuti. Il *seeing* medio è di $\sim 1.6''$. Un limite importante all'efficienza dell'analisi di questi dati è venuto dall'impossibilità, di fatto, di utilizzare le immagini prese con il filtro nel blu per lo studio delle curve di luce. Questo ha precluso lo studio di eventuali effetti *cromatici* per le curve di luce selezionate. Il campo totale di osservazione, inoltre, è relativamente piccolo, rispetto a quelli monitorati dalle esperienze successive. Questo naturalmente influisce negativamente, data la limitata statistica a disposizione, sulla possibilità di studiare l'aspettato gradiente nella profondità ottica attorno al *bulge* di M31 e, più in generale, sulla possibilità di trarre conclusioni fisiche significative riguardo la composizione dell'alone. La base temporale, 3 anni, non è inoltre da considerarsi sufficiente (anche in considerazione dei risultati delle esperienze in direzione delle Nubi di Magellano) per caratterizzare adeguatamente eventuali variazioni di luminosità rispetto alla prevista *unicità* dei segnali di *microlensing* (riguardo questo aspetto, diviene importante anche il ruolo giocato proprio dai dati analizzati in seguito). Lo studio della *forma* del segnale, infine, è spesso resa difficile da un non ottimale campionamento temporale delle misure (concentrate soprattutto nel secondo anno di osservazioni).

Uno degli aspetti operativi chiave del *pixel lensing* è la necessità di trattare grandi quantità di dati. Per questo, e per la caratterizzazione del segnale della curva di luce, sono stati elaborati dei metodi in grado di affrontare efficacemente questa esigenza. Per quanto riguarda l'analisi dei dati, la collaborazione AGAPE ha messo a punto un sistema efficiente per la riduzione e la preanalisi delle immagini, un trattamento originale soprattutto per quanto riguarda i problemi determinati dalle variazioni del *seeing*. E' stato inoltre introdotto l'utilizzo di adeguati metodi statistici (come il test di ipotesi di Durbin-Watson) indispensabili per un'analisi accurata del segnale.

Oltre all'avere mostrato, in concreto, la possibilità di svolgere un'indagine di questo genere, la collaborazione AGAPE, con i dati a disposizione, ha selezionato 16 curve di luce compatibili, nei limiti dei criteri di selezione adottati, con degli eventi di *microlensing*. La sensibilità stimata sui dati TBL è tale da permettere lo studio di variazioni di luminosità con una magnitudine R al massimo di ~ 21.5 .

Consideriamo più in dettaglio il candidato evento rilevato dalla collaborazione AGAPE detto AGAPEZ1 [10], di cui riportiamo la curva di luce in Fig. 1.8.

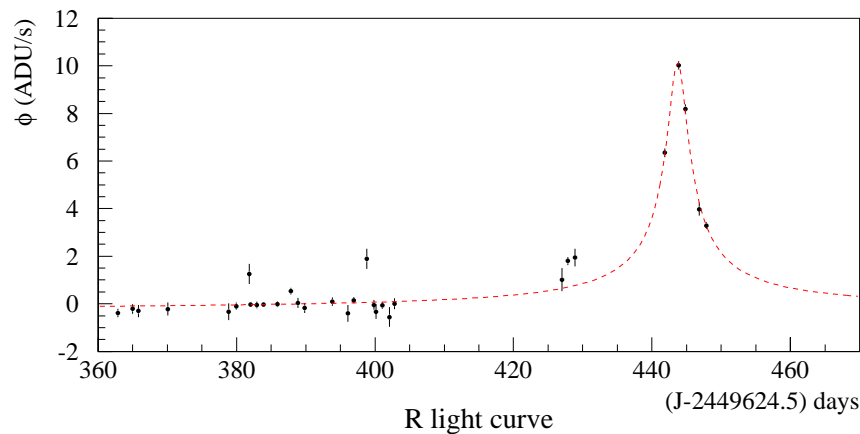


Figura 1.8: La curva di luce del candidato evento AGAPEZ1, è mostrata la finestra temporale nella regione della variazione di luminosità.

Si tratta di un evento ad alta amplificazione, la magnitudine R stimata al massimo è ~ 18 , e di breve durata. Non conoscere il flusso della sorgente a riposo, informazione non deducibile dai dati TBL, preclude l'accesso all'informazione rilevante al fine del calcolo della profondità ottica, il *tempo di Einstein*. In questo caso, un'analisi delle immagini d'archivio dell'HST ha però reso possibile individuare la *possibile* sorgente a riposo (Fig. 1.9)

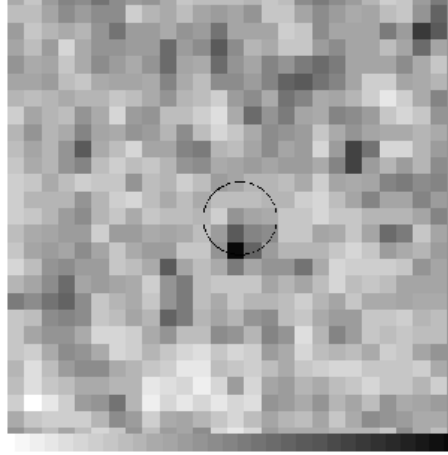


Figura 1.9: Immagine d'archivio del HST. Evidenziata al centro con un cerchio, la possibile sorgente a riposo del candidato evento di *microlensing* AGAPEZ1.

Nell'ipotesi di riconoscere questa sorgente *risolta* nell'immagine HST come la sorgente *non risolta* nei dati TBL all'origine dell'amplificazione rilevata, diviene possibile stimare l'amplificazione al massimo, $A \sim 40$ e valutare il *tempo di Einstein* $t_E \sim 55$ giorni caratteristici dell'evento. E' stato inoltre possibile stimare il *colore* da alcune misure nel filtro B.

Questa curva di luce risulta non compatibile con quella di nessuna stella variabile nota. Una possibile interpretazione è che si tratti di un evento di *microlensing bulge-bulge*, una contaminazione prevista agli eventi causati da MACHOs nell'alone, con una lente di massa $\sim 0.6M_{\odot}$.

L'analisi dei dati oggetto di questa ricerca ha reso possibile una caratterizzazione ulteriore delle curve di luce selezionate sui dati TBL. In particolare, essendo i campi di AGAPE completamente contenuti all'interno dei campi MDM, è stata analizzata la loro stabilità in un periodo di tempo successivo. Coerentemente con il criterio di esclusione applicato alle curve di luce in cui sono rilevate più di una variazione di luminosità significativa, delle 10 curve di luce che è stato possibile analizzare, 8 sono state escluse. La curva di luce di AGAPEZ1, pure analizzata sui dati MDM, viene confermata invece, con riguardo a questa caratterizzazione, come quella di un possibile evento di *microlensing*.

Capitolo 2

Le osservazioni MDM e il trattamento delle immagini

2.1 Introduzione

In questo capitolo descriviamo l'apparato sperimentale e i relativi dati con questo acquisiti (cui ci riferiamo come dati "MDM") sui quali è stata poi svolta l'analisi. Discutiamo tutta la fase preliminare alla ricerca e alla caratterizzazione degli eventi di *microlensing*.

Nel suo complesso, si può immaginare l'analisi divisa in due fasi distinte

- pre-analisi (*globale*) sulle immagini;
- ricerca e studio (*locale*) degli eventi di *microlensing*.

Si tratta in sostanza di due successive operazioni di filtraggio. Nella prima, lavorando *globalmente* sul flusso ricevuto nelle immagini, vogliamo eliminare tutti gli effetti estemporanei legati alle particolari condizioni di osservazione. Solo nel caso in cui questa analisi preliminare sia stata compiuta efficacemente assume allora significato la seconda, dove, *localmente* per ogni elemento dell'immagine, studiamo la forma delle variazioni temporali di luminosità nel tempo (le *curve di luce*).

Mentre è possibile verificare le condizioni globali di stabilità raggiunte in seguito alla prima fase di analisi, ovvero, essendo noto il risultato è possibile poi controllarlo, non abbiamo evidentemente una conoscenza *a priori* degli eventi di *microlensing* che sono l'obiettivo finale di questa ricerca.

2.2 Osservazioni e *set up* sperimentale

L'osservatorio di Kitt-Peak sorge su un rilievo montuoso nel deserto dello Stato dell'Arizona (USA), vicino al centro di Tucson. A circa 2000 metri di altitudine sono distribuiti 22 telescopi (e 2 radio telescopi), tra cui quelli dell'osservatorio MDM. Questo fu fondato dall'Università del Michigan, il Dartmouth College e il MIT, ora sostituito, nella collaborazione, dalla Columbia University e dalla Università dello Stato dell'Ohio¹.

Nel sito MDM sono presenti 2 telescopi. Il telescopio "Hiltner", con uno specchio principale di 2.4m di diametro. Il telescopio "McGraw-Hill" (Fig. 2.1), con uno specchio di 1.3m di diametro, utilizzato per la raccolta dei dati che sono qui analizzati. Lo specchio è stato parzialmente mascherato, e il suo diametro effettivo è di 1.27m. La longitudine del sito è -111.6167° , la latitudine 31.950° . E' situato a un'altitudine di 1925.0 metri *s.l.m.*.

Il periodo dell'anno migliore per osservare M31, tra settembre e dicembre, coincide con quello in cui le condizioni meteorologiche sul sito sono più propizie alle osservazioni. Praticamente tutte le notti a disposizione sono utili alla presa delle immagini.

Differenti camere CCD sono state utilizzate nel corso delle osservazioni, camere dette "Echelle", "SSCCD", "Nellie" e "Wilbur". In particolare, la prima è una CCD di 2048×2048 elementi unitari di

¹Questi dati sono condivisi con la collaborazione MEGA. Sono stati acquisiti dalla collaborazione AGAPE specialmente grazie al concorso del prof. A. P. Gould, dell'Università dello Stato dell'Ohio. Sono studiati indipendentemente, con una differente tecnica di analisi, dalla collaborazione MEGA.

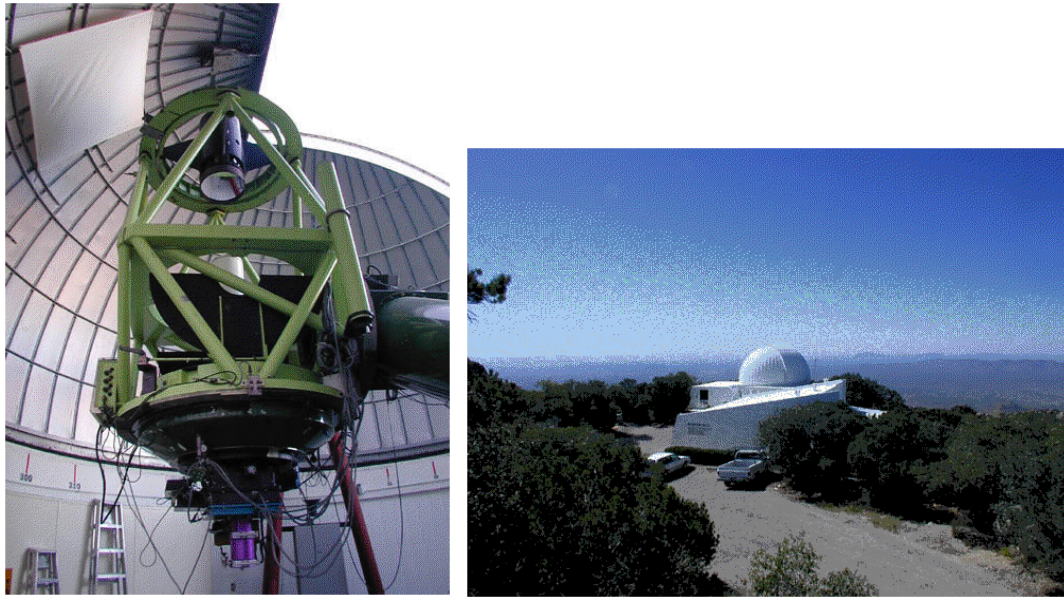


Figura 2.1: Il telescopio McGraw-Hill e il sito delle osservazioni.

immagine (pixel). Utilizzata con una focale di $f/7.6$ (20.72 arcseconds/mm), ogni pixel, di dimensioni fisiche pari a $24\mu m$, copre $0.5''$ ($= \arctan(\text{dimensioni lineari pixel/lunghezza focale})rad$), per cui il campo totale di vista è di circa $17' \times 17'$.

Vengono osservati (Fig. 2.2) 2 campi in direzione della galassia di Andromeda, M31, in direzione del centro galattico, disposti parallelamente al suo asse maggiore. Sono denominati “Target” (centrato in $RA=00h43m24s$, $DEC=41^\circ12'10''$ (J2000)), il campo “lontano” lungo la linea di vista dal nostro punto di osservazione nella Via Lattea, e “Control” (centrato in $RA=00h42m14s$, $DEC=41^\circ24'20''$ (J2000)).

Il tempo di osservazione viene gestito in modo tale da avere in genere 2 notti di osservazione sul campo “Target” per ogni notte di osservazione sul campo “Control”. La maggior parte delle osservazioni sono state effettuate con la camera “Echelle” ($\sim 80\%$). Sul sottoinsieme dei dati camera “Echelle”-campo “Target”, abbiamo quindi concentrato l’attenzione per la ricerca di eventi di *microlensing*. Parallelamente, sono state analizzate alcune curve di luce del campo “Control” (dove non abbiamo tuttavia svolto un’analisi completa).

Le osservazioni sono cominciate nel 1997 (quando sono unicamente state prese e studiate alcune immagini per accertare la fattibilità del progetto) e sono tuttora in corso. La distribuzione temporale dell’osservazioni non è purtroppo ottimizzata per la ricerca di eventi di *microlensing*. L’intervallo temporale coperto delle osservazioni ora utilizzate è di poco superiore a un anno (ottobre 1998-dicembre 1999), e in questo arco di tempo le misure sono distribuite in modo molto irregolare. Il maggior numero di notti di osservazione è concentrato nei primi 3 mesi ($\sim 80\%$ delle notti e delle immagini). Una distribuzione delle misure a intervalli regolari nel tempo, possibilmente ogni notte, e per un periodo di tempo abbastanza lungo (almeno 3 anni) renderebbe molto più efficiente la ricerca e la caratterizzazione degli eventi di *microlensing*.

Una lunga base temporale è necessaria per studiare l’*unicità* degli eventi eventualmente rilevati, un buon campionamento per un accurato studio della forma. Dal campionamento dipende inoltre, ovviamente, la sensibilità al rilevamento di segnali con durata più o meno lunga.

I dati vanno acquisiti in due colori per permettere lo studio dell’*acromaticità*. Per questo motivo vengono utilizzati 2 filtri (Fig. 2.6), il filtro “R-Jt”, centrato sulla zona del rosso dello spettro (filtro R), e il filtro “Custom Scientific - I”, sensibile alle lunghezze d’onda nell’infrarosso vicino² (filtro I). Immagini nei due filtri vengono prese, in successione, quasi in ogni notte di osservazione. Si privilegiano comunque le osservazioni nel rosso dove ci sono poco meno del doppio delle immagini che nell’infrarosso.

Per quanto riguarda, in particolare, i dati della camera “Echelle-Target” (di cui mostriamo una tipica

²In seguito parliamo di “infrarosso” per brevità, mentre in genere in astronomia si intende con questo un filtro sensibile a lunghezze d’onda superiori a $1\mu m$.

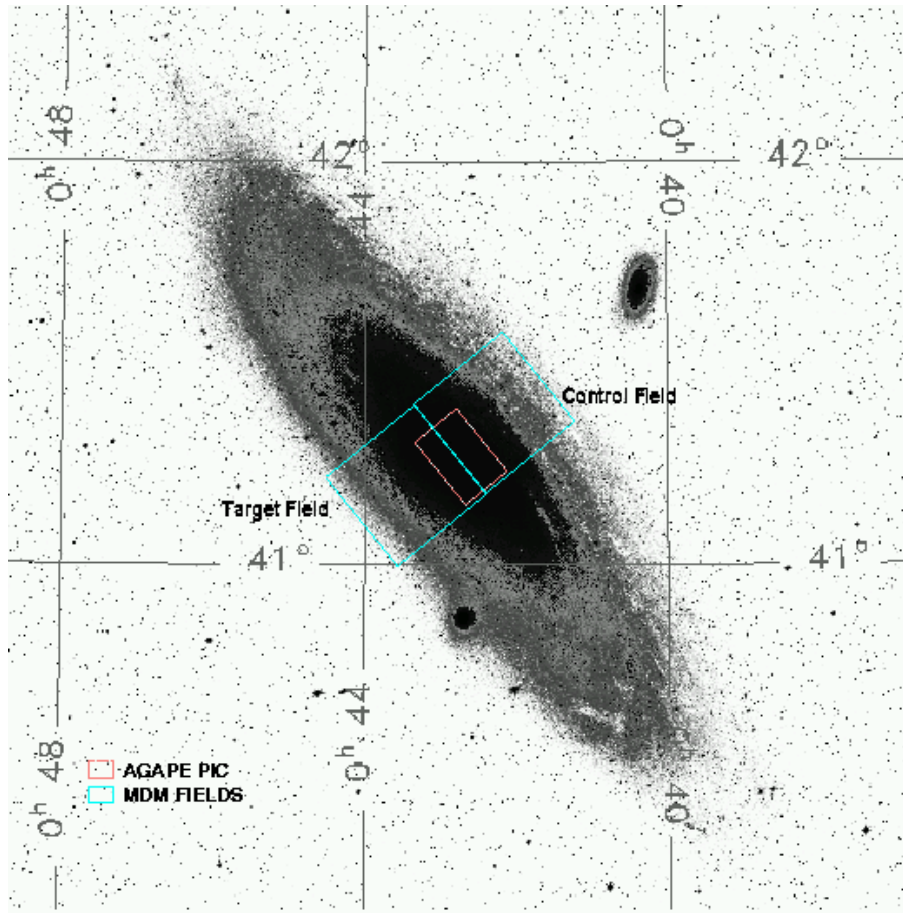


Figura 2.2: I due campi di osservazione, “Target” e “Control”, sovrapposti a un’immagine di M31. All’interno sono visibili anche i campi delle osservazioni TBL del gruppo AGAPE.

immagine nella Fig. 2.4) abbiamo la seguente (Fig. 2.3) distribuzione temporale nei diversi periodi di osservazione (quando la camera viene smontata e poi rimontata).

Il tempo di esposizione per le immagini nel rosso (R) e nell’infrarosso (I) è rispettivamente di 6 e 5 minuti.

Distribuite lungo un periodo totale di 453 giorni ci sono 42 notti di osservazione in R e 40 in I con ~ 860 e ~ 470 immagini in totale rispettivamente (in media ~ 20 immagini R e ~ 12 immagini I per ogni notte di osservazione).

Nel corso di ogni notte di osservazione vengono inoltre prese alcune immagini utilizzate poi per la calibrazione degli effetti strumentali (*bias* e *flat field*).

Le condizioni medie del *seeing* (Fig. 2.5) sono simili nei due filtri, con un valore medio di $\sim 1.6''$.

Come si evince dalla Fig. 2.6, la camera è ottimizzata per le osservazioni nel R , mentre non viene sfruttato tutto l’intervallo di frequenza reso disponibile dal filtro I . Osservazioni in queste lunghezze d’onda sono del resto importanti in quanto permettono di caratterizzare meglio di un filtro centrato per esempio nella regione del blu il “rumore” degli eventi di *microlensing* dato dalle stelle variabili. L’atmosfera è trasparente per tutto l’intervallo di lunghezze d’onda interessato.

Facendo da una parte riferimento a un insieme di ~ 30 stelle di riferimento di magnitudine nota, [103], nei filtri Cousins standard (R_C e I_C) rilevate all’interno del campo “Target”, confrontando dall’altra i risultati ottenuti in questo modo con quelli dedotti da un’analisi comparata con i dati TBL di AGAPE conoscendo la calibrazione fatta su di questi (per il filtro R), abbiamo calibrato la magnitudine “strumentale” del nostro apparato su quella dei filtri standard ottenendo le seguenti equazioni di colore

$$R_c = m_R - 0.13 \cdot (m_R - m_I) + 22.54, \quad (2.1)$$

$$I_c = m_I - 0.02 \cdot (m_R - m_I) + 22.21, \quad (2.2)$$

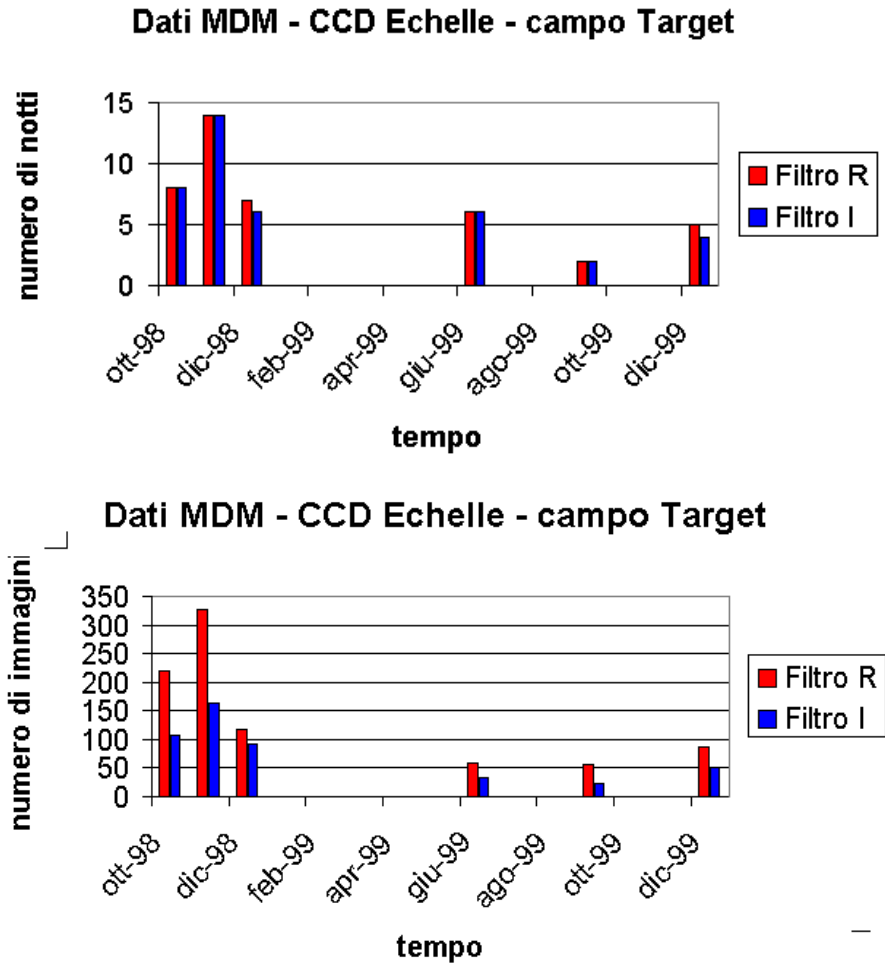


Figura 2.3: Distribuzione temporale del numero di notti di osservazione (in alto) e di immagini per i dati “Echelle-Target”.

dove $m_{R(I)} = -2.5 \cdot \log(\phi^{R(I)})$ è la stima fatta del flusso ricevuto per un oggetto risolto espressa in ADU/s , 360 (300) il tempo di esposizione dell’immagine misurato in secondi. L’incertezza associata a questa stima è ~ 0.1 magnitudini.

Il fattore di perdita stimato è di ~ 1.5 .

Ho avuto occasione di partecipare direttamente alla presa dei dati nel dicembre 1999.

2.3 Riduzione e pre-analisi

L’analisi delle curve di luce è preceduta da un lavoro di riduzione delle immagini. Questo può essere distinto in due momenti differenti:

- la correzione degli effetti strumentali;
- la correzione degli effetti legati alle condizioni di osservazione.

2.3.1 Gli effetti strumentali

La correzione degli effetti strumentali è stata fatta utilizzando il software di gestione delle immagini astronomiche IRAF³.

³<http://iraf.noao.edu/>

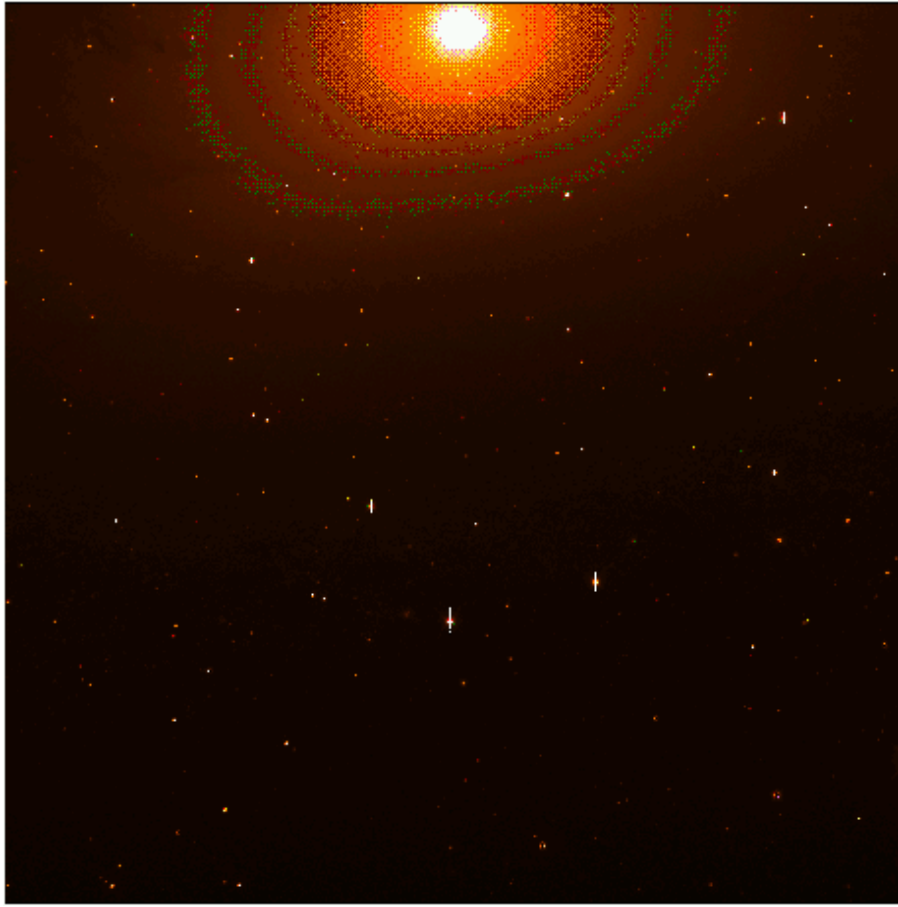


Figura 2.4: Il campo “Target” come visto sui dati elaborati.

Per impedire il conteggio di quantità con valore negativo, un *bias* elettronico è applicato alla camera CCD prima di ogni lettura. Questo determina una sorta di fondo che va sottratto a ogni immagine prima di ogni ulteriore trattamento. Le immagini da sottrarre sono dette di *bias* e si ottengono con tempo di esposizione virtualmente nullo fatte con l’otturatore chiuso.

Un problema maggiore è legato alle variazioni spaziali di sensibilità di risposta della camera CCD (risposta tipicamente migliore al centro). Si aggira il problema attraverso una operazione di *calibrazione*, ovvero si normalizza ogni immagine *reale* (immagine presa durante la notte sulla quale viene svolta l’analisi) con un’immagine presa su di un fondo a luminosità uniforme, detta *flat field* o immagine di calibrazione. Dato il flusso nel pixel i, j dell’immagine reale originaria $\phi_{(i,j)}^{originaria}$, l’immagine di *bias* e quella di *flat field* relative, si “ricostruisce”, pixel per pixel, l’immagine reale ridotta come

$$\phi_{(i,j)}^{ridotta} = \frac{\phi_{(i,j)}^{originaria} - \phi_{(i,j)}^{bias}}{\phi_{(i,j)}^{flatfield}} \cdot \langle \phi^{flatfield} \rangle, \quad (2.3)$$

dove $\langle \phi^{flatfield} \rangle$ è un fattore numerico di normalizzazione, calcolato come una media sul flusso dell’immagine $\phi^{flatfield}$.

Per immagine di *bias* relativa a una immagine reale data si intende quella costruita con una media sulle immagini di *bias* prese all’inizio di ogni notte di osservazione (in genere, 5).

La costruzione dell’immagine di *flat field* che entra nell’espressione (2.3) è invece più delicata, come già lo è la presa delle singole immagini di calibrazione. Si vogliono ottenere immagini tali che le uniche disuniformità rimaste siano proprio quelle caratteristiche dello strumento. Per questo vengono fatte delle osservazioni, con un tempo di esposizione di pochi secondi, del cielo al tramonto o all’alba. Occorre cogliere il breve momento di equilibrio propizio alle osservazioni, evitando da una parte i problemi di

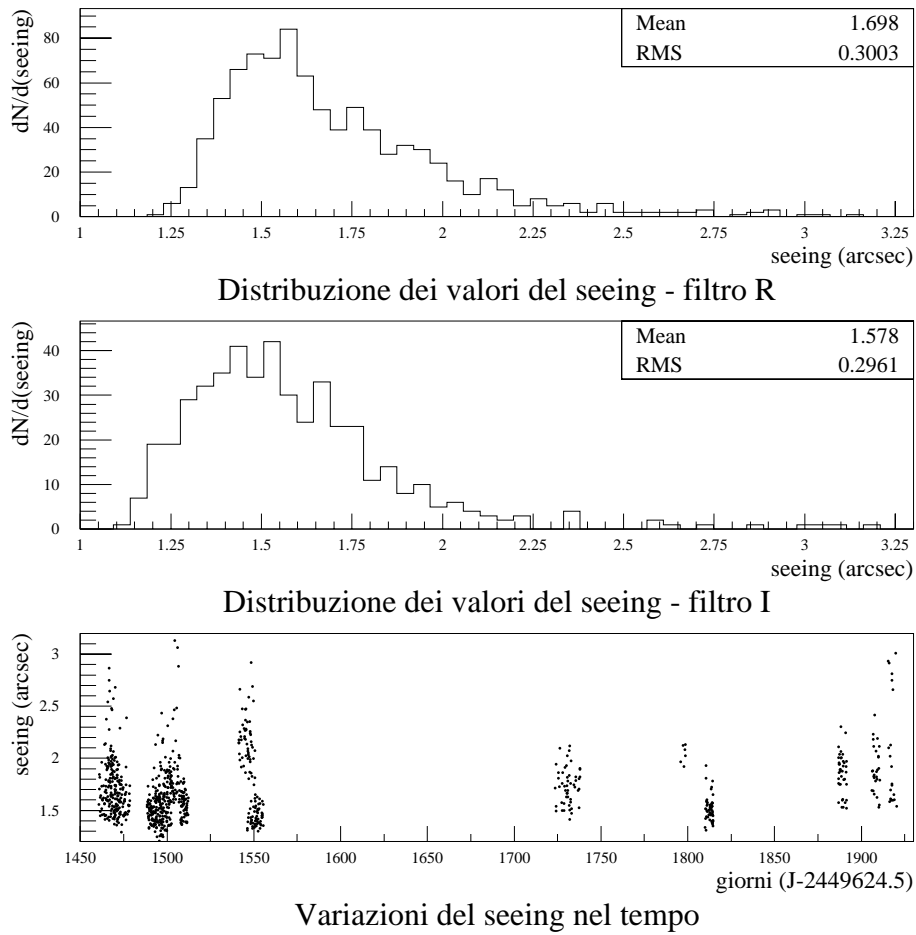


Figura 2.5: La distribuzione dei valori del *seeing* per le immagini “Echelle - Target” nei due filtri, e, in basso, la curva temporale di variazione del *seeing*.

saturazione del flusso in lettura dati dalla luce del giorno, dall'altra quelli di disuniformità del segnale che sono causati dalle stelle.

Come procedura alternativa di acquisizione, si possono prendere delle immagini su un telone illuminato all'interno della cupola. Questo può presentare degli inconvenienti nel trattamento dovuti al diverso, rispetto alle immagini sul cielo, cammino ottico compiuto dalla luce, e a eventuali problemi di riflessioni parassite causate da un non perfetto isolamento luminoso della cupola. Nel caso specifico trattato, immagini di questo tipo sono state prese ma poi non sono state utilizzate nelle successive fasi di riduzione. Un'analisi specifica su un campione di dati acquisiti nella stessa notte ha del resto evidenziato su queste immagini la presenza di alcuni, indesiderati, effetti globali non rilevati sulle immagini di *flat field* sul cielo.

Ogni notte, preferibilmente al tramonto, vengono prese 3 o 4 immagini di *flat field* per ogni colore (la risposta della CCD dipendendo dal filtro utilizzato) sul cielo in direzione dello zenith.

Al fine di costruire un'immagine di *flat field* con il minor rumore possibile e dalla quale siano stati rimossi tutti i possibili effetti accidentali delle osservazioni, la procedura ideale consiste nel mediare il maggior numero di immagini di calibrazione possibile. In realtà, la risposta della CCD varia nel corso del tempo, in modo particolarmente significativo ogni volta che lo strumento viene smontato e rimontato. Per questo motivo sono stati costruiti dei *flat field* medi a partire da tutte le immagini di calibrazione prese durante un dato periodo di osservazione. In questo, avendo cura di escludere quelle dove erano evidenti tracce di particolari anomalie, poi non rilevate nelle immagini reali della stessa notte, e quelle dove la traccia lasciata dalla stelle era tanto forte da risultare evidente ancora nelle immagini mediate. Per immagine di *flat field* relativa a una data immagine reale si intende quindi quella di *flat field* medio relativa allo stesso periodo di osservazione.

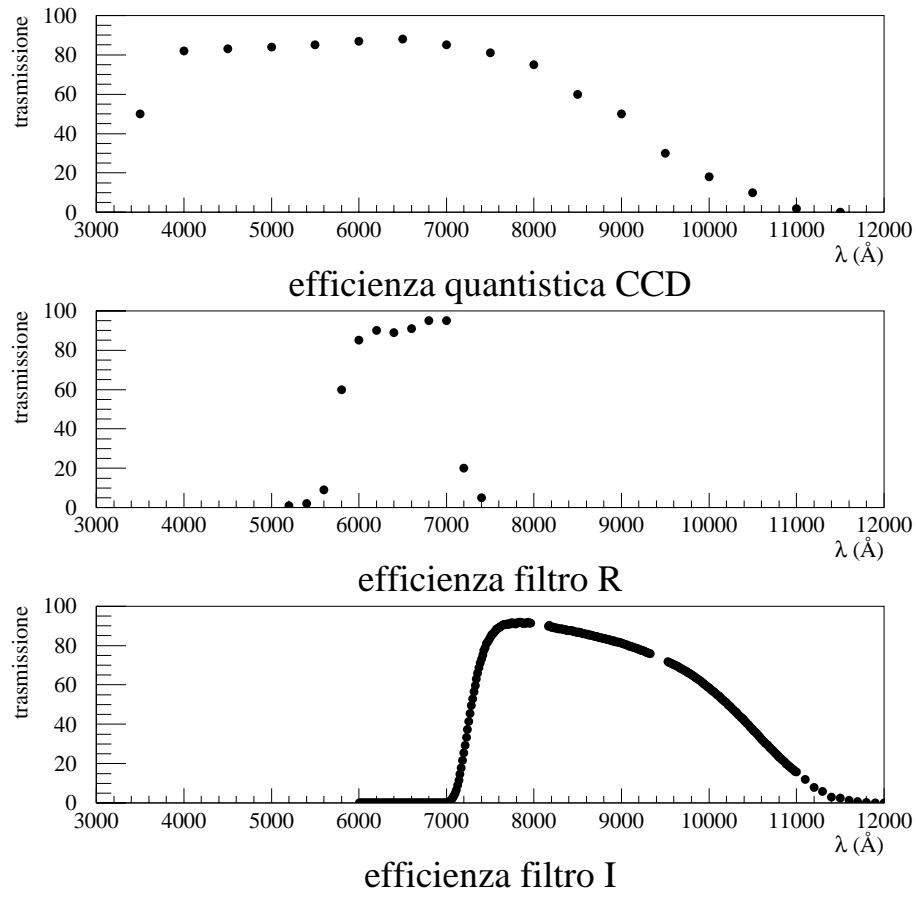


Figura 2.6: I filtri e la funzione di efficienza della camera CCD “Echelle” utilizzata.

Essendo i periodi di osservazione di lunghezza temporale differente (dai 2 ai 20 giorni), il numero di immagini di *flat field* effettivamente utilizzato per la costruzione di ogni immagine di calibrazione media varia in modo sensibile (da 3 a più di 50). Questo ha inevitabili e ovvie conseguenze sul rumore statistico poi rilevato sulle immagini ridotte.

Va sottolineata l'importanza di questa prima riduzione delle immagini, soprattutto in considerazione del trattamento successivo. Questo si basa sullo studio di effetti globali su ogni immagine nel quale occorre avere la certezza di non confondere gli effetti che si vogliono studiare (determinati da fenomeni *esterni* all'apparato strumentale del telescopio) con quelli strumentali.

2.3.2 Analisi preliminare: i pixel caldi

Sulla camera CCD si trovano alcuni pixel difettosi (detti pixel *caldi*) dove si rileva, localizzato, un enorme eccesso di flusso dovuto a effetti elettronici. Su di una singola immagine possono quindi essere confusi con dei raggi cosmici. Il loro effetto sull'analisi delle curve di luce è però ancora più fastidioso. Un pixel caldo infatti, a differenza di un raggio cosmico, rimane tale durante tutto il periodo di osservazione. Del resto, come conseguenza dell'operazione di allineamento geometrico discussa tra breve, il “raggio d'azione” di ogni pixel caldo si allarga in una sorta di macchia attorno al pixel difettoso. Questo significa che tutte le curve di luce interessate risentono della sua influenza, rendendo impossibile, in corrispondenza, un'analisi corretta delle variazioni di flusso. Per questo motivo abbiamo sottoposto tutte le immagini a un trattamento preliminare con lo scopo di individuare e *neutralizzare* i pixel caldi.

L'algoritmo utilizzato è molto semplice. Dato il flusso di un pixel $\phi_{(i,j)}$, calcoliamo il flusso medio in un quadrato di lato di 3 pixel centrato su tale pixel ($\equiv \langle \phi \rangle_{(i,j)}^{(3)}$). Consideriamo un pixel “sospetto” se mostra una variazione anomala rispetto al corrispondente flusso medio calcolato nel quadrato circostante

$$\phi_{(i,j)} - \langle \phi \rangle_{(i,j)}^{(3)} > n \cdot \sigma(\phi_{(i,j)}), \quad (2.4)$$

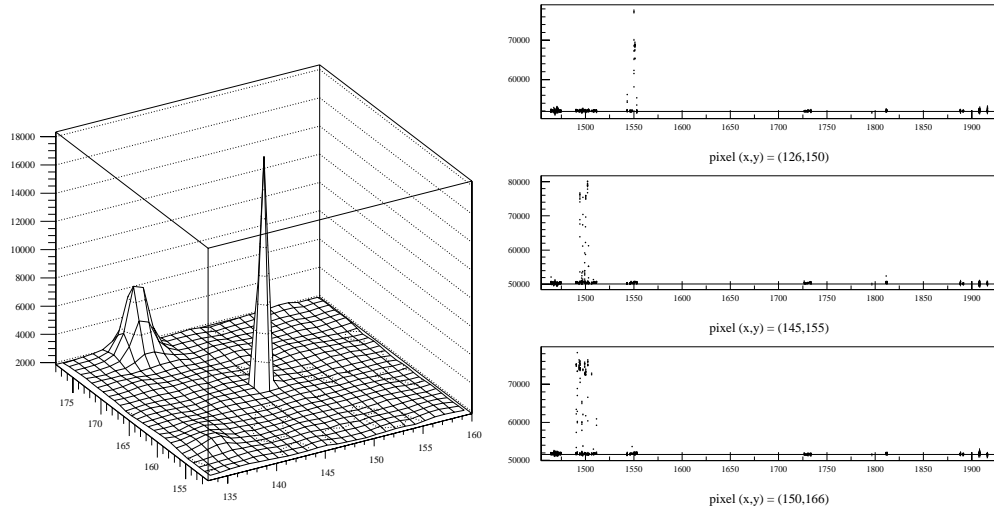


Figura 2.7: La posizione e l'intensità luminosa di un pixel caldo su di una immagine (a sinistra). Alcune curve di luce dello stesso pixel caldo. La “deriva” geometrica è la stessa che si osserva nella Fig. 2.8.

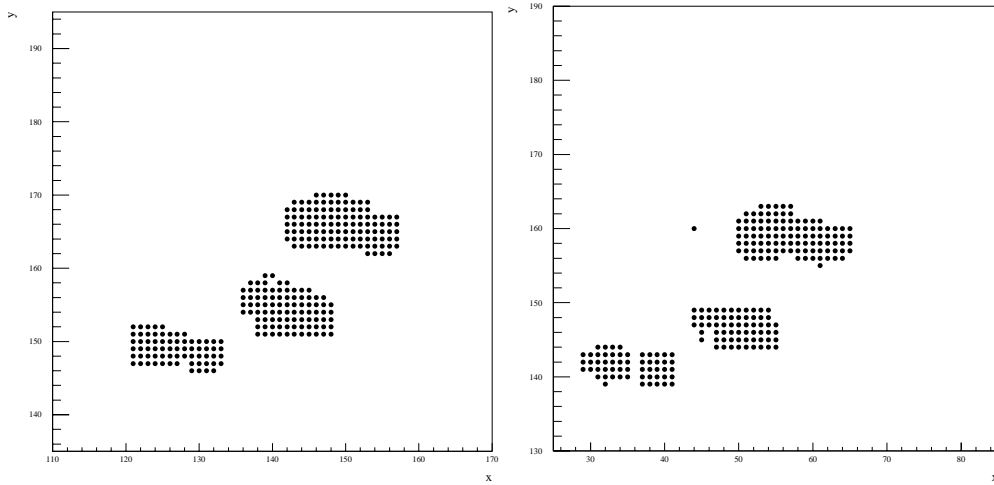


Figura 2.8: Mostriamo (a sinistra per lo stesso pixel della Fig. 2.7), le “macchie” determinate da due distinti pixel caldi (la geometria conseguente alla “deriva” geometrica è naturalmente la stessa). I pixel in nero sono quelli in corrispondenza dei quali si registra, nel corso del tempo, una variazione di luminosità significativa. Essendo dominata dall'influsso del pixel caldo, risulta in corrispondenza impossibile analizzare le curve di luce al fine della ricerca di eventi di *microlensing*.

dove $\sigma(\phi_{(i,j)})$ è l'errore statistico associato a $\phi_{(i,j)}$ (data l'operazione di media, quello associato a $\langle \phi \rangle_{(i,j)}^{(3)}$ risulta in confronto trascurabile), n un intero, tipicamente $n = 15$.

In questo modo esiste il rischio di selezionare anche “blob” di pixel, generalmente associati al segnale delle stelle risolte. Come secondo passaggio quindi, fra tutti i pixel così selezionati riteniamo solo quelli in cui la variazione avviene in un pixel isolato (sfruttiamo in questo modo la caratterizzazione spaziale dei pixel caldi).

Ripetiamo questa analisi su più immagini, scelte tipicamente all'inizio e alla fine dei periodi di osservazione, e consideriamo come pixel caldi solo quelli che vengono sempre selezionati (sfruttando ora la loro caratterizzazione temporale).

In questo modo sono stati trovati 7 pixel caldi sulla CCD Echelle. Come spiegato, il numero di curve

di luce che risentono del loro effetto è molto più elevato.

Come trattamento preliminare sulle immagini sostituiamo al flusso di ogni pixel riconosciuto come “caldo” il flusso medio dei pixel immediatamente vicini.

Un procedimento analogo, ricercando però i pixel che presentano variazioni anomale della luminosità del tipo (2.4) solo in una immagine, potrebbe essere utilizzato per individuare i raggi cosmici. Per questo problema si è però fatto piuttosto affidamento al software esistente sviluppato dalla collaborazione AGAPE [100].

2.3.3 “Normalizzazione” del flusso

Discutiamo ora la correzione del flusso per gli effetti legati alle condizioni di osservazione.

Intendiamo per immagini quelle ridotte secondo l’espressione (2.3) discussa in precedenza. Per questo trattamento riprendiamo quanto sviluppato dal gruppo AGAPE [9, 89]. In modo particolare per la valutazione degli errori e la discussione sulla stabilizzazione del *seeing* facciamo riferimento a [100].

L’obiettivo di tutto il trattamento preliminare è quello di mettersi nelle condizioni migliori per studiare le variazioni temporali di flusso su ogni pixel. Questo significa isolare tutti i fenomeni, legati alle condizioni di osservazione e quindi rilevabili *globalmente* sulle immagini, all’origine di variazioni di flusso che tendono a nascondere il segnale fisico ricercato (*locale*) filtrandolo in modo variabile nel tempo, e “correggere” il flusso osservato di conseguenza. Tutti i procedimenti che illustriamo di seguito si basano sul principio di riportarsi, per ogni immagine considerata, alle condizioni di osservazione di una immagine scelta come *riferimento*.

Distinguiamo 3 operazioni distinte di *allineamento* (o *correzione*)

- allineamento *geometrico*;
- allineamento *fotometrico*;
- correzione degli effetti del *seeing*.

L’allineamento geometrico

Nonostante la cura posta nelle operazioni di puntamento del telescopio all’inizio di ogni notte di osservazione e l’efficienza del programma di guida, due immagini non risultano mai esattamente sovrapponibili. Con l’operazione di allineamento geometrico vogliamo ottenere una numerazione *coerente* per i pixel di ogni immagine, coerente nel senso che al pixel (i, j) corrisponda, per tutte le immagini, sempre la stessa porzione di cielo osservato.

L’allineamento geometrico si basa su di una trasformazione generale a sei parametri in un piano. Sono cioè contemplati effetti di traslazione, rotazione e deformazione. Questi ultimi due effetti, piccoli, sono in realtà rilevanti solo nel calcolo della posizione effettiva del pixel, ma vengono trascurati al momento di ricalcolarne il flusso.

L’analisi è compiuta con l’ausilio di un *software* sviluppato dalla collaborazione EROS [123]. Viene scelto un campione di stelle sull’immagine di riferimento, non troppo luminose per evitare fenomeni di saturazione che renderebbero impossibile una corretta determinazione della loro posizione. Individuate le stesse stelle sull’immagine da allineare, si calcolano i parametri della trasformazione

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Calcolata con questa la posizione di uno spigolo del pixel dell’immagine da allineare, si procede poi come se l’unico effetto fosse quello di traslazione, e si ricalcola il flusso di ciascun pixel a partire dal flusso misurato nei quattro pixel circostanti ponderato per la frazione di superficie occupata.

L’indeterminazione maggiore dei coefficienti della trasformazione viene dalla valutazione del centro delle stelle risolte. Una ulteriore sorgente di limitazione è data dalla dimensione angolare del pixel (nel caso trattato $0.5''$). La precisione ottenuta è dell’ordine di $0.2''$.

Per ottenere un migliore allineamento geometrico è preferibile disporre di una camera CCD con pixel la cui dimensione angolare sia la più piccola possibile.

Come si può vedere in Fig. 2.9, gli effetti di traslazione (cui sono tra l’altro legati i problemi di “deriva” geometrica dell’effetto dei pixel caldi discussi in precedenza) in genere non superano i 30 pixel. Per questo motivo all’interno delle immagini è stata ritagliata una fascia esterna di queste dimensioni

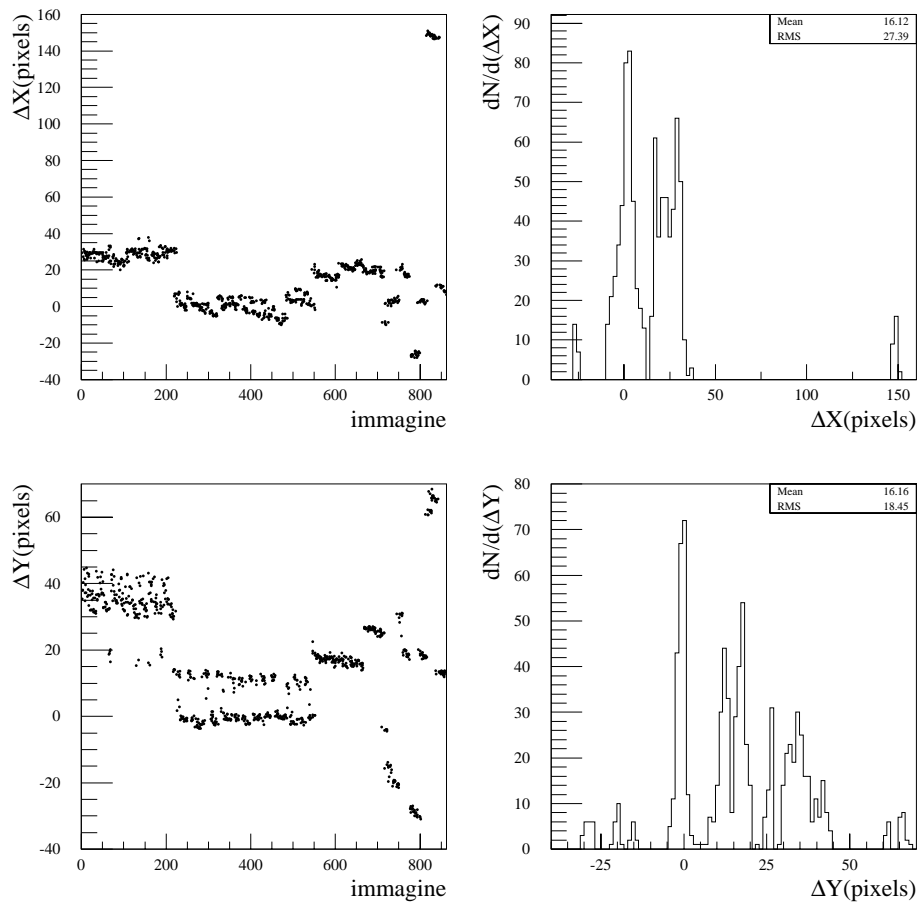


Figura 2.9: Gli effetti sistematici di *shift* della posizione della camera corretti dall'allineamento geometrico sulle ~ 860 immagini R studiate.

dove non viene effettuata poi l'analisi delle curve di luce. Per alcune immagini invece (notti del 18 e 19 dicembre 1999) questi effetti sono molto più importanti. Questi pixel sono comunque stati mantenuti nell'analisi successiva, le curve di luce corrispondenti mancando allora dei punti relativi alle notti in questione.

La calibrazione delle immagini

Allineate geometricamente le immagini, vogliamo ora normalizzarne il flusso rispetto a quella scelta come *riferimento*.

I pixel di ogni immagine ricevono, nel corso del tempo, il flusso emesso da tutti gli oggetti astrofisici posti in una determinata regione del cielo. Le variazioni che vogliamo studiare sono associate a questi stessi oggetti e sono quindi caratterizzate dal fatto di essere *puntuali* (o comunque sostanzialmente *locali* quando si tiene presente l'effetto del *seeing*). Globalmente invece, su tutti i pixel di ogni immagine in modo equivalente (a almeno in senso *macroscopico* rispetto alla regione interessata dalla variazione fisica), il flusso ricevuto varia a causa delle diverse condizioni di osservazione. Un approccio naturale a questo problema è allora quello di riferirsi a delle quantità medie calcolate su ogni immagine il cui confronto permette di ottenere la normalizzazione cercata rispetto all'immagine di *riferimento* data.

Occorre allora individuare le cause possibili di variazione del segnale ricevuto e determinare opportune relazioni, *empiriche*, che legano il flusso ricevuto di una immagine a quello di un'altra. In prima approssimazione queste relazioni si possono considerare *lineari* nel flusso ricevuto. Determinati gli opportuni parametri di normalizzazione, si costruisce l'immagine "corretta", ovvero l'immagine ideale che si sarebbe ottenuta se durante il suo tempo di esposizione le condizioni di osservazione fossero state identiche a quelle dell'immagine di riferimento.

In modo formale (dove va comunque ricordato il carattere fondamentalmente empirico dell’approccio) si può scrivere una relazione tra il flusso ricevuto dall’immagine di riferimento in un dato pixel $((i, j) \rightarrow \phi_R^{(i,j)})$ e il flusso ricevuto nello stesso pixel dall’immagine da allineare, $(\phi_c^{(i,j)})$, dove ammettiamo di poter considerare invece del flusso ricevuto nell’immagine, il flusso di una immagine costruita a partire da quella originale al fine di isolare il problema studiato. Scriviamo allora $\phi^{(i,j)} \rightarrow \mathcal{R}(\phi^{(i,j)})$, come

$$\mathcal{R}(\phi_R^{(i,j)}) = A \mathcal{R}(\phi_c^{(i,j)}) + B, \quad (2.6)$$

dove A e B sono parametri da determinare. Questi hanno carattere macroscopico, nel senso indicato, e si determinano a partire da uno studio statistico sull’immagine, mentre poi la relazione va naturalmente intesa valida elemento di immagine per elemento di immagine. In questo modo si corregge localmente il flusso per le modifiche indotte dagli effetti globali delle condizioni di osservazione. I pixel sede di reali variazioni fisiche influenzano, in linea di principio, la relazione (2.6) di allineamento, ma naturalmente il loro contributo rimane marginale (e questo è coerente con lo spirito dell’operazione di normalizzazione), e di fatto vengono esclusi durante il calcolo effettivo dei parametri dove si ha cura di eliminare tutti i pixel per cui si rilevano delle condizioni “estreme”.

Determinati i parametri, il flusso dell’immagine corretta (o “allineata” $\equiv \phi_a$) si calcola a partire dalla relazione (2.6) come

$$\mathcal{R}(\phi_a^{(i,j)}) = A \mathcal{R}(\phi_c^{(i,j)}) + B, \quad (2.7)$$

ovvero si ricostruisce l’immagine ϕ_c , come la si sarebbe osservata nelle stesse condizioni di osservazione dell’immagine di riferimento.

In seguito vengono omessi gli indici di pixel (i, j) . Con ϕ allora possiamo intendere tanto l’immagine quanto il suo flusso conteggiato pixel per pixel.

Generalmente si considerano due categorie di effetti che richiedono due studi distinti, quelli relativi alle variazioni delle condizioni *fotometriche* e quelli relativi alle condizioni del *seeing*.

Stima dell’errore e analisi statistica della bontà dei processi di allineamento

La valutazione dell’errore associato al flusso osservato si basa sul confronto tra la dispersione osservata sui dati e l’errore statistico poissoniano associato al processo di emissione dato dalla radice del numero dei fotoni ($\phi_{fotoni} \equiv \phi_\gamma$) conteggiati:

$$\sigma_{stat}(\phi_\gamma) = \sqrt{\phi_\gamma}. \quad (2.8)$$

Il valore del flusso viene espresso di solito in ADU , unità di conteggio della camera CCD, legati al numero dei fotoni ricevuti da una costante di proporzionalità detta *gain* ($\equiv g$) caratteristica dello strumento utilizzato ⁴.

$$\phi_\gamma = g \phi_{ADU}, \quad (2.9)$$

per cui

$$\sigma_{stat}(\phi_{ADU}) = \sqrt{\frac{\phi_{ADU}}{g}}. \quad (2.10)$$

Lo studio delle curve di luce, come le valutazioni della stabilità del flusso, sono fatte considerando come unità di raccolta elementare di flusso i “superpixel”. Diciamo “superpixel” un quadrato di dimensioni $m \times m$ centrato su un dato pixel, il cui flusso è dato dalla somma del flusso nei pixel costitutivi

$$\phi \rightarrow \Phi = \sum_{pixels} \phi. \quad (2.11)$$

L’errore statistico associato è dato da

$$\sigma_{stat}^2(\Phi) = \sum_{pixels} \sigma_{stat}^2(\phi), \quad (2.12)$$

(se non altrimenti specificato consideriamo sempre il flusso espresso in ADU , e spesso, dove non ci sono possibilità di ambiguità, scriviamo ϕ per Φ).

⁴Nel caso della camera Echelle, $g = 3.2$.

Valutiamo, sull'insieme delle ~ 860 immagini R , la dispersione su di un insieme di curve di luce e la confrontiamo con il rumore statistico associato al flusso. Sia la dispersione normalizzata lungo una curva di luce con N punti

$$\epsilon = \frac{\sqrt{\frac{\sum_i (\phi_i - \bar{\phi})^2}{N}}}{\sigma}, \quad (2.13)$$

dove σ è dato semplicemente dall'errore statistico (2.12) sulla media *globale* $\bar{\phi}$, essendo questa definita come la media ponderata del flusso lungo la curva di luce. La distribuzione per ϵ è mostrata in Fig. 2.10.

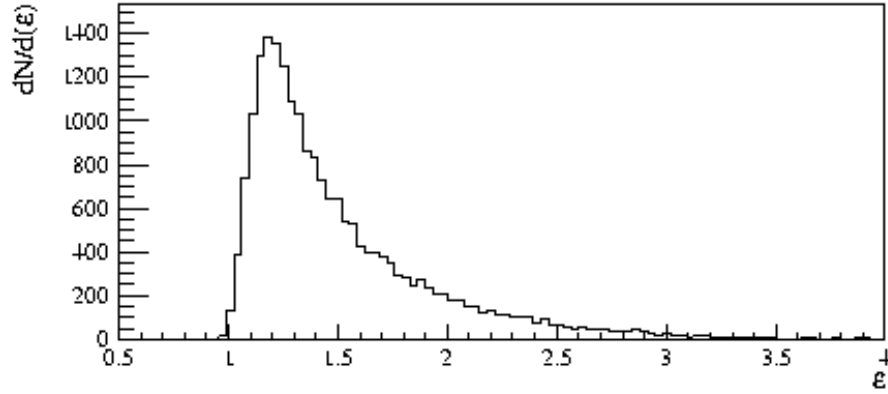


Figura 2.10: Dispersione relativa osservata lungo le curve di luce.

Vediamo come l'adozione del solo errore statistico non faccia che sottostimare leggermente l'errore "vero", la distribuzione in Fig. 2.10, centrata in 1.2, dovendo essere centrata piuttosto in 1.

Avendo verificato come la dispersione sia sostanzialmente compatibile con l'errore statistico, questo è l'errore che associamo al flusso. Altre sorgenti di errore sono legate agli effetti strumentali e alla "ripixelizzazione" delle immagini fatta durante l'operazione dell'allineamento geometrico. Questi contributi sono trascurati nell'analisi successiva.

Nella valutazione dell'errore statistico i coefficienti introdotti per la correzione del flusso dell'immagine entrano come semplici fattori moltiplicativi. L'incertezza legata alla loro determinazione è in genere piccola rispetto all'errore poissoniano sul flusso. Detto A il generico coefficiente di allineamento risulta

$$\sigma_{stat}(A \cdot \phi) = A \cdot \sigma_{stat}(\phi). \quad (2.14)$$

Come viene discusso diffusamente in seguito adottiamo due strategie differenti per la valutazione dell'errore, sempre partendo dalla sua valutazione statistica, nei due casi considerati nell'analisi: curve di luce costruite con un punto per ogni immagine piuttosto che con un punto per ogni notte di osservazioni.

La guida migliore alla verifica della bontà delle operazioni di allineamento fatte sulle immagini e della stima degli errori è l'ispezione diretta delle curve di luce. In particolare, dove non siano rilevate variazioni fisiche (stelle variabili, *microlensing*, altro), ci si aspetta di osservare delle curve di luce costanti nel tempo nei limiti del rumore statistico.

Globalmente vorremmo raggiungere le condizioni che ritroviamo in ogni curva di luce dove non ci sono variazioni di luminosità locali determinate dagli oggetti che contribuiscono al flusso ricevuto. Il flusso, in questo caso, dovrebbe essere distribuito secondo una gaussiana normale attorno al valore medio del flusso calcolato lungo la curva di luce ($\bar{\phi}$).

In Fig. 2.11 mostriamo una curva di luce "stabile" nel senso descritto e la relativa distribuzione dei residui z_i dove

$$z_i = \frac{\phi_i - \bar{\phi}}{\sigma(\phi_i)}, \quad (2.15)$$

con $i = 1, \dots, N$ è l'indice di immagine. L'errore $\sigma(\phi)$ è l'errore statistico. Vediamo allora come la valutazione dell'errore basata su di questo è appropriata per i dati analizzati.

Altri strumenti statistici si rivelano efficaci per un'analisi globale. Per questo vanno tenute presenti le due dimensioni sulle quali si muove l'analisi, essendo queste strettamente legate e interdipendenti. La

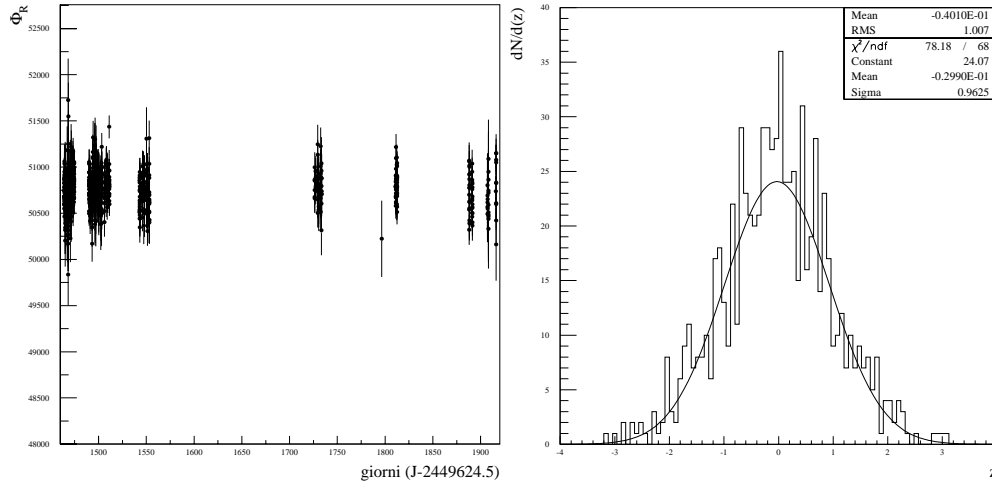


Figura 2.11: Una curva di luce stabile e la relativa distribuzione dei residui attorno al valor medio $\bar{\phi}$. La linea continua è quella del miglior fit di una gaussiana sui dati.

dimensione *temporale*, quella dove effettivamente si studia il segnale fisico lungo la curva di luce, e la dimensione *spaziale* di ogni singola immagine rispetto a quella di riferimento, fondamentale perché alla base del procedimento di normalizzazione del flusso.

La stabilità sull'insieme delle curve di luce è efficacemente caratterizzata dal calcolo della distribuzione del χ^2 calcolato rispetto alla media globale su ogni curva di luce

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\phi_i(t) - \bar{\phi}}{\sigma(\phi_i(t))} \right)^2, \quad (2.16)$$

(dove la somma per ogni pixel è estesa alle N immagini lungo la curva di luce).

Immagine per immagine è possibile invece studiare la distribuzione della differenza normalizzata del flusso pixel per pixel, differenza rispetto a una immagine data (per esempio quella di riferimento)

$$\frac{\phi_c^{(i,j)} - \phi_R^{(i,j)}}{\sigma(\phi_c^{(i,j)} - \phi_R^{(i,j)})}. \quad (2.17)$$

La distribuzione del χ^2 (sull'insieme delle curve di luce) dovrebbe essere centrata sul numero delle immagini lungo la curva di luce, e, dato l'elevato numero di punti, avere una coda di tipo gaussiano (questo andamento dipende essenzialmente dalla stima degli errori associati al flusso). La distribuzione (2.17) (per ogni immagine) avere l'andamento di una gaussiana centrata in zero (questo è un test per l'allineamento) con dispersione unitaria (di nuovo, nel caso di una corretta stima degli errori).

In entrambi i casi si sfrutta il carattere sostanzialmente gaussiano del processo studiato (statistica di Poisson con valore aspettato dei conteggi molto elevato) per cui ogni misura del flusso, in ogni pixel, può essere considerata come una variabile casuale che segue questa distribuzione.

Allineamento fotometrico

Le condizioni relative tra le diverse immagini legate alle variazioni dell'assorbimento atmosferico (l'assorbimento interstellare dovuto alla presenza di polveri è costante nel tempo, quindi non rilevante nella nostra prospettiva) e della luminosità di fondo del cielo (legata essenzialmente alle fasi lunari e ai fenomeni di diffusione collegati), sono caratteristici della *fotometria* di un'immagine.

Ricordata la relazione generale (2.6), notiamo che in questo caso è possibile considerare direttamente il flusso ricevuto nell'immagine per descrivere il fenomeno. L'assorbimento relativo è dato da un coefficiente di proporzionalità tra il flusso dell'immagine di riferimento e quella da allineare, a , la variazione della luminosità di fondo del cielo è ben descritta da una costante additiva, b . Scriviamo

$$\phi_R = a \phi_c + b. \quad (2.18)$$

Determinati i due coefficienti a , b , l'immagine allineata fotometricamente, il cui flusso è quindi globalmente normalizzato su quello dell'immagine di riferimento, è allora

$$\phi_c^a = a \phi_c + b. \quad (2.19)$$

Un metodo spesso utilizzato per la determinazione dei parametri di allineamento si basa sul calcolo del flusso di un gruppo scelto di stelle risolte. Questo permette la determinazione del coefficiente di assorbimento una volta scelto un opportuno campione di stelle non intrinsecamente variabili (il calcolo del flusso presuppone naturalmente un'ipotesi circa la PSF dell'immagine). Controindicazioni all'utilizzo di questo metodo, che pure non è stato direttamente testato sui dati a nostra disposizione, possono essere individuate nella minore statistica come nei possibili effetti sistematici dovuti alla cromaticità degli effetti che determinano l'assorbimento, quindi dal colore delle stelle selezionate nel campione.

Il metodo sviluppato dal gruppo AGAPE, detto degli *istogrammi*, si basa su un'analisi globale sull'immagine. L'ipotesi di base è che la distribuzione spaziale del flusso ricevuto non debba cambiare tra un'immagine e l'altra. Per attuarlo si eguagliano i momenti delle distribuzioni coinvolte. In pratica, ci si limita al calcolo dei primi due, la media e la varianza:

$$\bar{\phi} = \frac{1}{n \cdot n} \sum_{i,j=1}^n \phi_{i,j}, \quad (2.20)$$

$$\sigma^2(\phi) = \frac{1}{n \cdot n} \sum_{i,j=1}^n (\phi_{i,j} - \bar{\phi})^2, \quad (2.21)$$

dove $\phi_{i,j}$ sta per il flusso ricevuto nel pixel i, j di una generica immagine con $n \cdot n$ pixel.

Se ϕ_c^a è il flusso dell'immagine corrente allineata, per ottenere

$$\bar{\phi}_c^a = \bar{\phi}_R, \quad \sigma(\phi_c^a) = \sigma(\phi_R), \quad (2.22)$$

occorre quindi imporre

$$a = \frac{\sigma(\phi_R)}{\sigma(\phi_c)}, \quad b = \bar{\phi}_R - a \bar{\phi}_c. \quad (2.23)$$

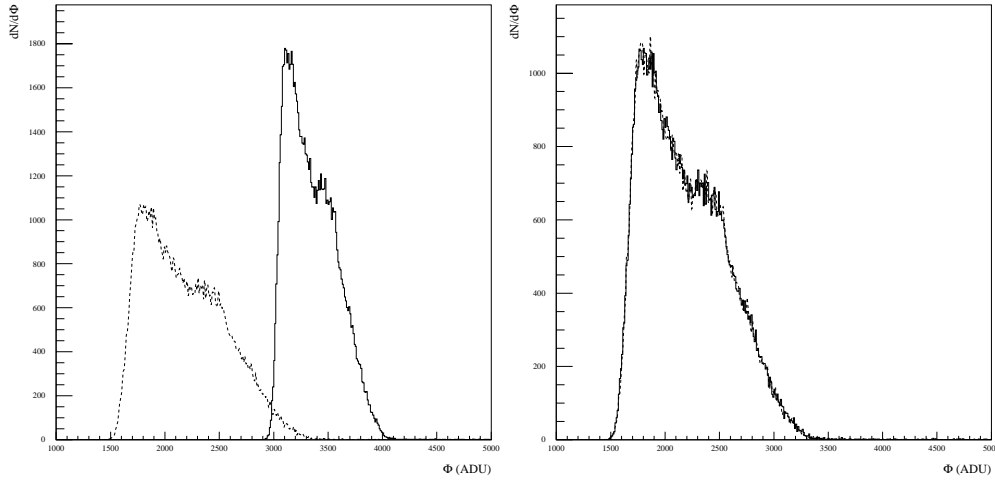


Figura 2.12: Distribuzione del flusso prima (a sinistra) e dopo l'allineamento fotometrico per l'immagine di riferimento e un'immagine da allineare.

Questo metodo, pur soffrendo del fatto che non si tiene conto dell'errore sul flusso, tra a suo vantaggio la presenza di un forte gradiente (Fig. 2.13) di luminosità nelle immagini (determinato dal *bulge* di *M31*). Questo leva la degenerazione che altrimenti renderebbe impossibile una corretta valutazione dei due coefficienti.

Inoltre tale gradiente disaccoppia gli effetti del *seeing* (effetti rilevanti su piccola scala spaziale) da quelli della luminosità di fondo e dell'assorbimento, che sono più tipicamente effetti a larga scala spaziale.

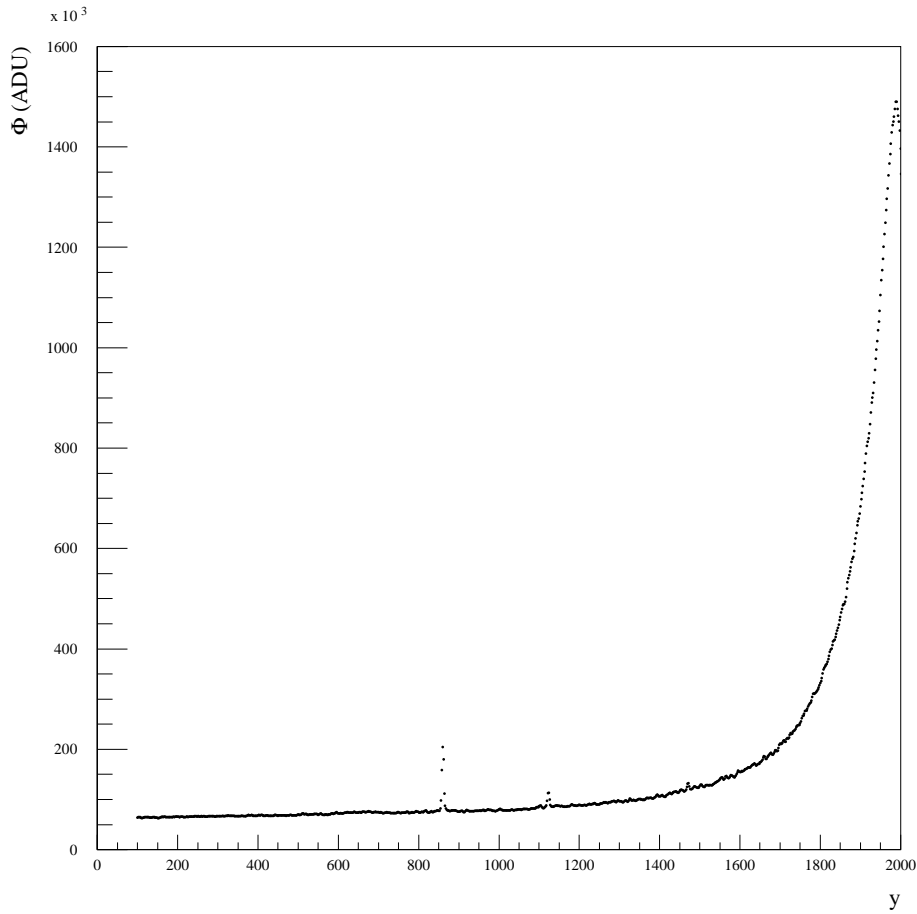


Figura 2.13: Il gradiente di flusso osservato in direzione del *bulge* di M31.

Il calcolo effettivo dei diversi momenti avviene in modo iterativo, dove successivamente escludiamo con un'opportuna selezione dal computo quei pixel che mostrano delle variazioni di flusso anomale. Questo permette tra l'altro di gestire in modo efficace le variazioni indotte dalle condizioni del *seeing* nei pressi delle stelle risolte.

Il calcolo viene svolto valutando media e dispersione del flusso dei pixel (e non dei superpixel).

Mostriamo infine in Fig. 2.14 le distribuzioni, l'evoluzione nel corso del tempo e la dipendenza dal *seeing* dei due coefficienti di allineamento a e b . L'assorbimento rimane quasi costante ($a \sim 1$) nel corso del tempo. Il fondo del cielo varia, seguendo le fasi lunari, in modo che risultano valori di b tipicamente compresi nell'intervallo tra -500 e qualche decina di *ADU* (per pixel). Il valore di entrambi i coefficienti è, come previsto, sostanzialmente indipendente dalle condizioni di *seeing* dell'immagine.

Correzione degli effetti del *seeing*

L'effetto del *seeing* sulle immagini si manifesta come una diluizione del segnale (puntuale) ricevuto in un pixel su più pixel circostanti (la zona di influenza di un oggetto viene detta PSF, *Point Spread Function*, e viene in genere efficacemente approssimata con una gaussiana a due dimensioni⁵). All'effetto di perdita del segnale si mescola naturalmente quello di guadagno del segnale dei pixel vicini.

Variazioni nelle condizioni del *seeing* sono determinate dalle turbolenze nell'atmosfera, dalle variazioni di temperatura e umidità. Il *seeing* è molto sensibile, in particolare, al microclima (specie all'aereazione) all'interno della cupola dove è posto lo strumento.

⁵Più precisamente, e con riferimento a una data forma di PSF, il *seeing* viene definito come la larghezza a mezza altezza della stessa PSF.

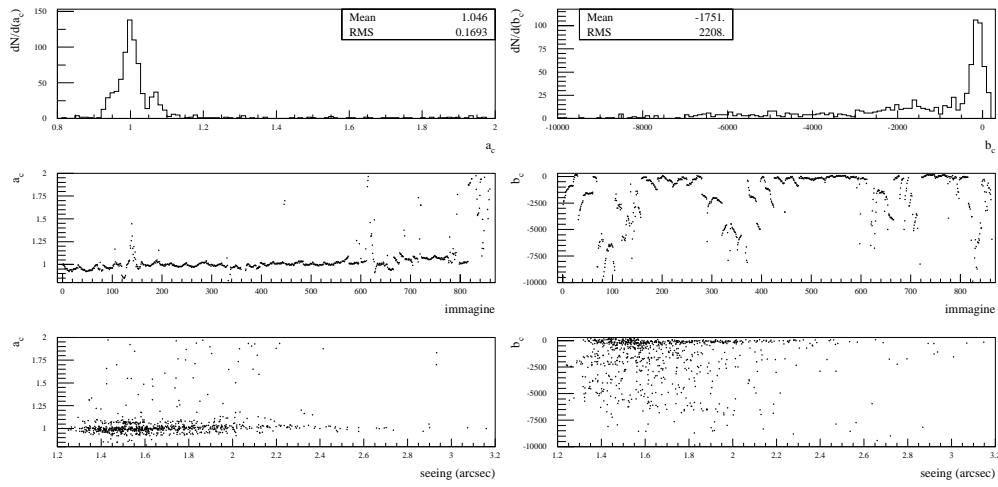


Figura 2.14: I coefficienti dell’allineamento fotometrico, dall’alto: distribuzione, evoluzione nel tempo e dipendenza dal *seeing*.

Variando queste condizioni nel corso del tempo, l’effetto risultante sulle curve di luce è una instabilità che impedisce una corretta analisi del segnale.

Come primo approccio al trattamento del problema, sostituiamo, al flusso di ogni pixel, la somma dei flussi di un numero adeguato di pixel circostanti (tanti da coprire il disco di *seeing* tipico). In pratica scriviamo

$$\phi \rightarrow \Phi \equiv \sum_{pixels} \phi. \quad (2.24)$$

Passiamo cioè dalla nozione di flusso in un “pixel” a quella di flusso in un “superpixel” (come già introdotto discutendo della valutazione dell’errore). Notiamo che, a parte gli ovvii effetti di bordo, in un’immagine ci sono tanti pixel quanti sono i superpixel.

L’analisi del segnale viene svolta allora seguendo la variazione temporale non del flusso ricevuto in ogni singolo pixel, dove a causa del *seeing* si raccoglie una frazione variabile nel tempo del flusso totale di una sorgente, bensì in un superpixel, riducendo così gli effetti di instabilità.

Dato il valore del *seeing* medio sulle immagini ($\sim 1.6''$) e le dimensioni angolari di ogni pixel ($0.5''$), scegliamo, come dimensioni per un superpixel, un quadrato di lato di 5 pixel.

Questa operazione si rivela però insufficiente. La correzione delle variazioni indotte dal *seeing* passa allora attraverso uno studio *globale* sull’immagine con la costruzione di un’immagine ausiliaria, il *mediano*. Di nuovo, cioè, facciamo delle considerazioni statistiche sul flusso ricevuto. Metodi alternativi si basano sulla valutazione della PSF di ogni immagine (PSF che, dato l’approccio utilizzato, possiamo evitare di costruire).

Il *mediano* ($\equiv \tilde{\phi}$) viene costruito sostituendo al valore di ogni pixel quello del valore mediano calcolato in una finestra di $m \times m$ pixel. Caratteristica essenziale è la sua indipendenza dal *seeing* dell’immagine. La finestra deve allora avere delle dimensioni sufficienti per poter diluire al meglio i segnali stellari (i più dipendenti dalle variazioni del *seeing*), ma non deve essere troppo grande, per evitare di appiattire le variazioni su più larga scala spaziale che si vogliono conservare (si è scelto il valore $m = 31$). Il *mediano* è quindi l’immagine da dove si sono rimosse tutte le variazioni di piccola scala spaziale. Dato il valore del flusso in un’immagine, i pixel si distribuiscono equamente al di sopra e al di sotto del corrispondente *mediano*.

La stabilizzazione del *seeing* si basa sullo studio degli scarti relativi al mediano delle diverse immagini. Data l’immagine di riferimento, immagini di miglior *seeing* tendono ad avere scarti più importanti in valore assoluto rispetto al mediano, immagini di cattivo *seeing* tendono invece a schiacciarsi su di esso. Si vuole allora riportare tutte le immagini nelle stesse condizioni, allo stesso scarto dal *mediano* dell’immagine di riferimento.

Data la relazione tra le variazioni di *seeing* e gli scarti dal *mediano*, la correzione (effettuata sui

superpixel) si basa allora sulla relazione (insistiamo sul suo carattere *empirico*)

$$\Phi_c^a - \tilde{\Phi} = (1 + \alpha) (\Phi_R - \tilde{\Phi}) + \beta, \quad (2.25)$$

per cui, calcolati i coefficienti α , β , è poi immediato costruire l'immagine corretta ($\equiv \hat{\Phi}_c$) come

$$\hat{\Phi}_c = \frac{\Phi_c^a + \alpha \tilde{\Phi} - \beta}{1 + \alpha}. \quad (2.26)$$

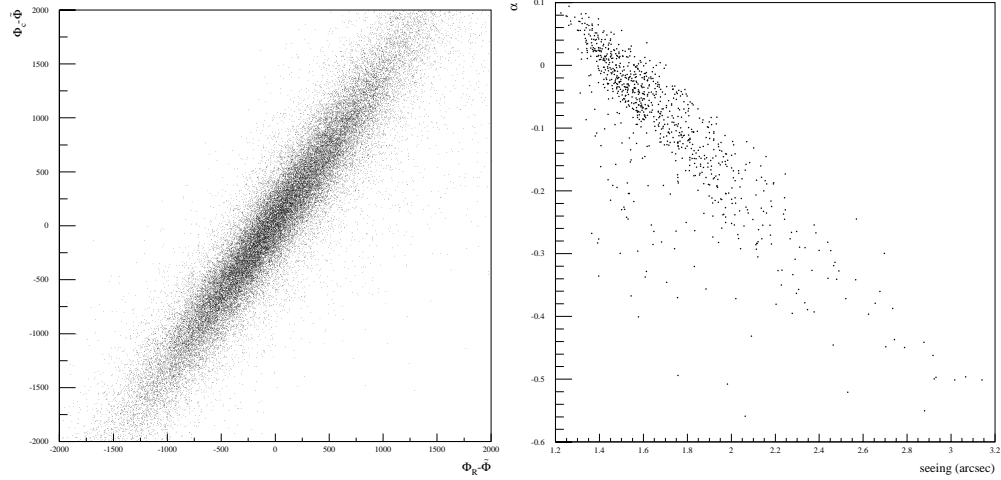


Figura 2.15: La relazione lineare tra gli scarti al mediano di un'immagine con cattivo *seeing* ($\sim 2.1''$) *prima* della calibrazione in funzione di quelli dell'immagine di riferimento, scelta con *seeing* di $\sim 1.6''$ (a sinistra). La dipendenza del parametro di correzione α dal valore del *seeing*.

Il coefficiente α è il parametro rilevante del modello, e tiene conto, in un certo modo, della frazione di *seeing* contenuta in ogni superpixel (in seguito a questa stabilizzazione consideriamo questa frazione una costante, ~ 0.87 , nel tempo). Come si può vedere (Fig. 2.15 a sinistra) è fortemente correlato al valore del *seeing*. Osserviamo che, pur data la scelta di una immagine di riferimento con *seeing* medio ($\sim 1.6''$), l'entità della correzione non è simmetrica rispetto al valore del *seeing*. Il parametro β è invece di interpretazione meno immediata. Può essere l'indizio di un problema del modello (effetti non lineari) ovvero di un problema nella costruzione del *mediano*. Il suo contributo nella correzione è comunque generalmente trascurabile (il suo valore, dell'ordine delle decine di *ADU*, va per questo confrontato con quello degli scarti al *mediano* sull'immagine).

Come risulta evidente dalla esposizione, il gradiente di luminosità presente sulle immagini, essenziale al momento dell'allineamento fotometrico, non svolge alcun ruolo nel procedimento di stabilizzazione del *seeing*.

Come per l'allineamento fotometrico, i parametri della correzione α e β sono *globali*, ma a differenza di questo, la calibrazione del *seeing* ha carattere più locale, in quanto dipende anche dal *mediano*, il cui valore varia da pixel a pixel.

Sottolineiamo come questa correzione sia del tutto indipendente dalla stima del valore del *seeing*, quindi dalla costruzione di una PSF. Una PSF di tipo gaussiano viene di fatto stimata al momento del calcolo dell'allineamento geometrico, questo al fine del "riconoscimento" delle stelle sulle quali si basa, e da questo ha origine la valutazione del valore numerico che diamo al *seeing*. Questo valore viene utilizzato solo al momento della verifica che l'approccio seguito per la correzione sia coerente con quanto ci aspettiamo (attraverso la dipendenza $\alpha = \alpha(\text{seeing})$).

Mancando la stima della PSF, questo approccio al problema, piuttosto che alla ricostruzione di immagini di *seeing* equivalente, punta alla stabilizzazione lungo le curve di luce degli effetti del *seeing* (Fig. 2.16). In questo senso si rivela rapido ed efficace.

Per la determinazione dei coefficienti della relazione di stabilizzazione α e β è stata effettuata una regressione lineare basata sulla minimizzazione del χ^2 dove abbiamo tenuto conto, in modo corretto,

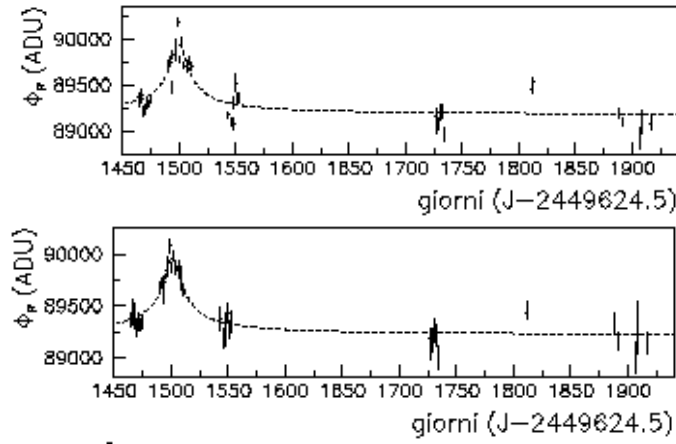


Figura 2.16: La stessa curva di luce, prima (in alto) e dopo la stabilizzazione del *seeing*.

dell'errore associato a tutti i termini coinvolti. In particolare abbiamo utilizzato il metodo detto di York [160] dove la determinazione dei parametri, impossibile analiticamente, viene fatta risolvendo per iterazioni successive un'equazione cubica per il coefficiente α (l'iterazione è resa necessaria dal fatto che gli stessi coefficienti delle varie potenze di α nell'equazione risolvibile dipendono da α).

Il riflesso

Il *mediano* cui si è fatto riferimento fino a questo momento è il generico mediano di un'immagine allineata fotometricamente. In teoria, essendo indipendente dal *seeing*, dovrebbe essere lo stesso per tutte le immagini corrette secondo la (2.19). Nella pratica questo non avviene. In particolare, si osserva un gradiente di luminosità, in una direzione differente rispetto a quello determinato dalla presenza del centro galattico di M31, gradiente amplificato nelle immagini con una forte luminosità di fondo del cielo.

Possiamo escludere che si tratti di un effetto legato a una cattiva costruzione dell'immagine di *flat field*, manifestandosi, per poi sparire, anche durante la stessa notte⁶.

Possiamo quindi attribuire la sua origine a degli effetti ottici parassiti all'interno del telescopio, amplificati dalla presenza di una forte luminosità di fondo. Diciamo *riflesso* la differenza tra il mediano di un'immagine allineata fotometricamente e il mediano dell'immagine di riferimento per l'allineamento fotometrico (Fig. 2.17).

La presenza di tale *riflesso* di fatto invalida il modello di correzione basato sulla (2.18), essendo il parametro a di assorbimento specialmente sensibile al gradiente di luminosità dell'immagine che dà la misura dell'ampiezza dell'istogramma sulla quale si basa la sua stima.

Di fatto dovremmo definire come immagine allineata fotometricamente quella allineata secondo la (2.19) previa sostituzione del suo mediano con quello dell'immagine di riferimento

$$\Phi_c^{a'} = \Phi_c^a - \tilde{\Phi}_c^a + \tilde{\Phi}_R. \quad (2.27)$$

Facendo allora solo riferimento al *mediano* dell'immagine di riferimento, è questa $(\Phi_c^{a'})$ l'espressione da utilizzare nella correzione del *seeing*, ovvero, la Φ_c^a dove però va considerato lo scarto relativo al suo mediano.

Considerando la (2.27), in modo equivalente la (2.25) si scrive

$$\Phi_c^{a'} - \tilde{\Phi}_R = (1 + \alpha) \cdot (\Phi_R - \tilde{\Phi}_R) + \beta, \quad (2.28)$$

ed esprimere l'immagine corretta come

$$\hat{\Phi}_c = \frac{\Phi_c^{a'} + \alpha \tilde{\Phi}_R - \beta}{1 + \alpha}. \quad (2.29)$$

⁶In particolare questo è stato osservato per le immagini prese durante la notte del 27 dicembre 1999. Il *flat field* relativo è stato costruito a partire dalle sole immagini prese in quella stessa notte, con un conseguente peggiore rapporto segnale su rumore, ma la certezza di non avere introdotto artificialmente effetti caratteristici di notti diverse.

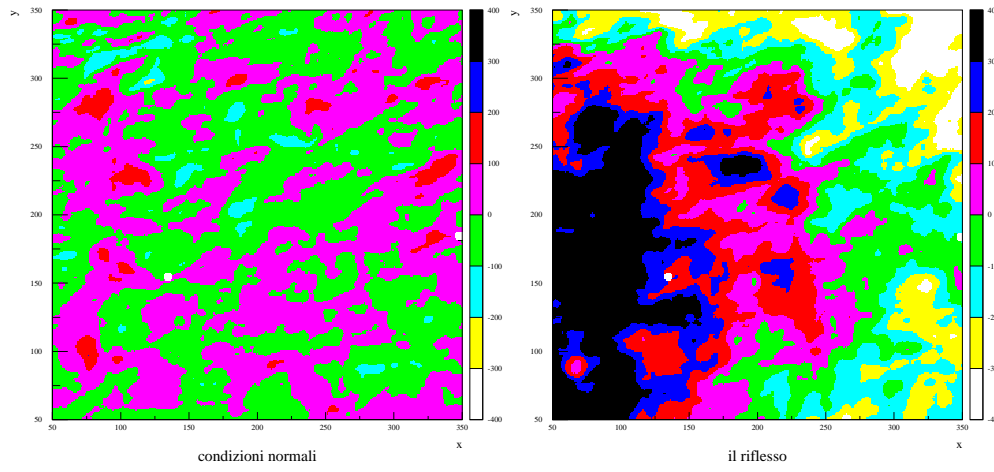


Figura 2.17: Il *riflesso*: gli effetti nell'immagine di sinistra rimangono nel limite del rumore, mentre a destra si nota un gradiente importante.

2.3.4 Un diverso approccio alla normalizzazione del flusso

Motivati dalle conseguenze indotte dalla presenza dell'effetto del *riflesso* presente su alcune delle immagini e da diverse considerazioni relative al rapporto tra i diversi passaggi della normalizzazione del flusso, abbiamo considerato un approccio differente al problema dell'allineamento fotometrico e alla correzione del *seeing*, basato esclusivamente sullo studio degli scarti dal *mediano*⁷. La ragione e la possibilità di considerare i due problemi (fotometria e *seeing*) distinti (nel contesto dell'approccio statistico qui seguito) viene, come abbiamo visto, dalla presenza del gradiente di luminosità determinato dal centro galattico di M31, indispensabile per disaccoppiare i due effetti. Del resto è proprio la presenza di un ulteriore gradiente, strumentale, a causare dei problemi.

La motivazione del metodo che ora discutiamo risiede nell'indipendenza, propria di un'analisi basata sullo studio degli scarti dal mediano, dalla presenza di gradienti di luminosità (di origine astrofisica piuttosto che strumentale). L'eventuale presenza di un effetto di *riflesso* non influenzerebbe in questo modo la correzione. Questa caratteristica ne farebbe, potenzialmente, uno strumento valido anche in situazioni in cui tale gradiente non è presente.

Supponendo, come del resto è ragionevole e comunque verificabile a posteriori, che lo studio degli scarti al mediano sia sensibile anche alle variazioni di assorbimento, consideriamo un approccio alternativo all'allineamento dove studiamo direttamente lo scarto dal mediano *senza* avere in precedenza allineato fotometricamente le immagini. Partiamo cioè dalla relazione

$$\Phi_c - \tilde{\Phi}_c = (1 + \sigma) (\Phi_R - \tilde{\Phi}_R) + \tau, \quad (2.30)$$

dove Φ_c e il relativo mediano $\tilde{\Phi}_c$ sono propri dell'immagine di cui vogliamo normalizzare il flusso rispetto a Φ_R che ha subito la sola operazione di allineamento geometrico.

Si tratta di fatto di un'espressione formalmente equivalente alla (2.28), che potremmo riscrivere come

$$\Phi_c - \tilde{\Phi}_c = \frac{1 + \alpha}{a} (\Phi_R - \tilde{\Phi}_R) + \frac{\beta}{a}. \quad (2.31)$$

Come abbiamo osservato, il *riflesso* può portare a una cattiva stima del coefficiente a dell'allineamento fotometrico. In questa prospettiva la pertinenza di questo approccio è dunque giustificata dal fatto che, come è anche evidente leggendo la (2.31), nel momento in cui si calcola il coefficiente α indipendentemente da a si ha la tendenza a correggere eventuali errori di valutazione del coefficiente di assorbimento.

Formalmente, l'unica differenza tra i due approcci risulta essere quella della determinazione dei parametri di allineamento.

Va comunque osservato che il parametro a è stato valutato partendo da un'analisi svolta studiando la dispersione dei pixel, mentre lo studio sullo scarto dal mediano viene sempre fatta considerando come elementi fondamentali i superpixel.

⁷ Ricordiamo, in particolare, le utili discussioni su questo argomento con S. Paulin-Hénriksson.

Vogliamo ora trovare gli elementi di valutazione dell'opportunità di eseguire la normalizzazione del flusso seguendo questo approccio.

Utilizziamo per questo confronto le 471 immagini del filtro I , limitandoci a una regione della CCD localizzata in prossimità del centro galattico (dove cioè il gradiente di luminosità è più accentuato⁸) di dimensioni pari a 400×400 pixel.

Per semplificare la notazione introduciamo i due coefficienti δ e ϵ , dove distinguiamo i due approcci indicando

$$\delta_0 \equiv \frac{1 + \alpha}{a}, \quad \epsilon_0 = \frac{\beta}{a}, \quad (2.32)$$

$$\delta_1 \equiv 1 + \sigma, \quad \epsilon_1 = \tau. \quad (2.33)$$

Scriviamo l'espressione per l'immagine corretta in funzione dei coefficienti δ e ϵ :

$$\hat{\Phi}_c = \frac{1}{\delta} (\Phi_c - \tilde{\Phi}_c) + \tilde{\Phi}_R - \epsilon. \quad (2.34)$$

Osserviamo che la valutazione del parametro b nella (2.18) di fondo del cielo non ha alcuna rilevanza, essendo poi l'introduzione del *mediano* dell'immagine di riferimento ad assicurare di fatto la stessa luminosità di fondo media per tutte le immagini.

L'immagine normalizzata su quella di riferimento è data dal *mediano* dell'immagine di riferimento, che fornisce il fondo, cioè le variazioni a larga scala spaziale (tipicamente il gradiente di luminosità verso il centro galattico), fondo a cui si sommano le variazioni su piccola scala spaziale caratteristiche dell'immagine date dallo scarto dal mediano pesato con un coefficiente che tiene conto delle variazioni dell'assorbimento e del *seeing* di ogni immagine rispetto a quella di riferimento.

Per valutare le differenze tra i due diversi approcci, confrontiamo i valori ottenuti per i coefficienti di correzione nei due casi. Inoltre, possiamo cercare di evidenziare eventuali differenze con gli strumenti statistici di analisi della stabilità delle immagini illustrati in precedenza. Infine, possiamo confrontare direttamente alcune curve di luce.

Abbiamo visto che il valore del coefficiente di allineamento fotometrico rimane quasi sempre costante uguale a 1, cioè le condizioni di assorbimento per la maggior parte delle immagini sono simili a quella dell'immagine di riferimento. Poiché una delle incognite di questo metodo è proprio la sua capacità di gestire i problemi propri all'assorbimento rispetto a quelli dovuti alle condizioni del *seeing*, utilizzare questa stessa immagine di riferimento, in questa analisi comparata, potrebbe portarci a delle conclusioni errate. Per questo motivo scegliamo una nuova immagine di riferimento, la stessa per l'allineamento fotometrico e quindi per la stabilizzazione del *seeing* nel primo approccio, e poi per la correzione unificata nel secondo. Questa è caratterizzata da condizioni di assorbimento molto diverse dalla media (è un'immagine molto assorbita, con un coefficiente $a = 1.7$ rispetto alla scelta precedente), mentre, come è sempre opportuno, ha una luminosità di fondo del cielo bassa e delle condizioni di *seeing* medie (discutiamo poi più in dettaglio quali sono le motivazioni che guidano la scelta dell'immagine di *riferimento*).

Confrontiamo i coefficienti calcolati nei due approcci (ricordiamo che a differenza della coppia δ_1, ϵ_1 , i coefficienti δ_0, ϵ_0 sono il frutto di un calcolo che avviene in due momenti successivi distinti).

Dal confronto dei coefficienti δ (Fig. 2.18) emerge la presenza di un piccolo ma evidente effetto sistematico. La correzione, nel primo approccio, tende a essere più grande (in media del $\sim 4\%$). Questo in particolare per i grandi valori di δ .

Circa il parametro ϵ (Fig. 2.19 a sinistra), l'analisi della distribuzione della differenza rivela di nuovo un effetto sistematico di ~ 30 ADU. Questo è comunque trascurabile in quanto piccolo rispetto all'errore sul flusso, ma di nuovo il coefficiente della prima correzione mostra la tendenza a essere più grande.

Data la relazione $\epsilon_0 = \beta/a$, e nell'ipotesi che la determinazione del coefficiente β non sia soggetta a errori sistematici, queste relazioni convergono dunque nell'indicare la tendenza, nel primo approccio, a sottostimare il coefficiente di assorbimento a . Questo sarebbe, del resto, coerente con il problema evidenziato del *riflesso*, essendo a valori elevati, in valore assoluto, del coefficiente b di fondo del cielo (dove il *riflesso* risulta più importante) associati in genere piccoli valori dell'assorbimento.

E' inoltre evidente, a destra nella (2.19), la correlazione tra i due effetti. Quanto più grande è il peso relativo di δ_0 rispetto a δ_1 , tanto maggiore lo è quello di ϵ_0 rispetto a ϵ_1 .

Ricordando allora l'espressione (2.34) vediamo allora come i due effetti (dove del resto solo a quello associato al coefficiente δ siamo in grado di dare un'interpretazione ragionevole) tendono a compensarsi.

⁸La stessa analisi, con gli stessi risultati, è stata poi ripetuta in una regione differente, lontana dal centro galattico.

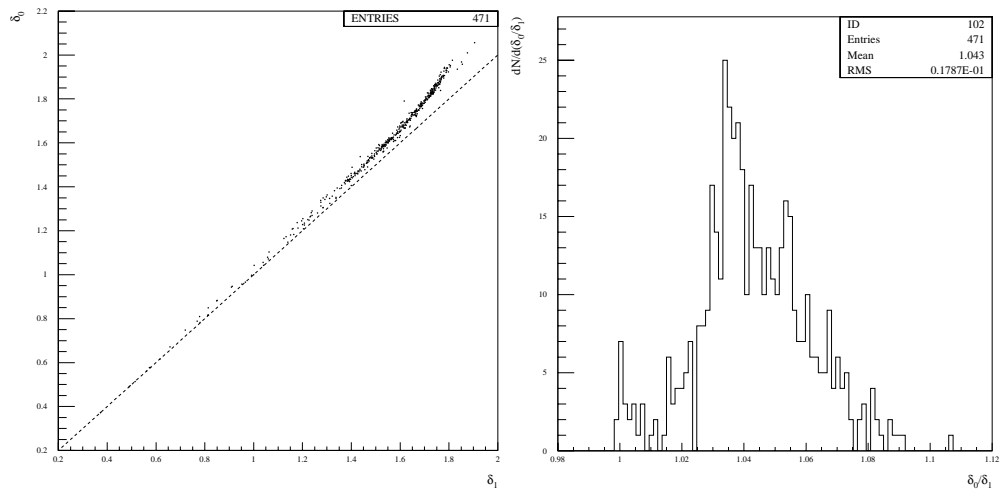


Figura 2.18: I valori ottenuti per il coefficiente moltiplicativo della correzione nei due metodi uno in funzione dell'altro (a sinistra, dove è punteggiata la retta $\delta_0 = \delta_1$), e la distribuzione del rapporto delle due stesse quantità.

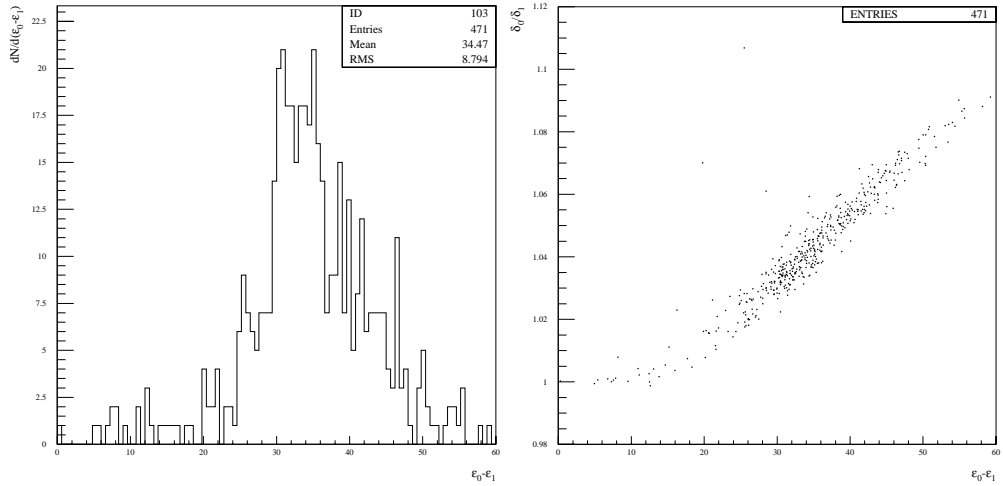


Figura 2.19: Distribuzione della differenza dei due coefficienti additivi della correzione (a sinistra) e la relazione tra il rapporto dei coefficienti moltiplicativi δ e la differenza di quelli additivi ϵ .

Nel nuovo approccio si tende a correggere di più lo scarto al mediano, locale, e ad attribuire minore importanza al coefficiente ϵ globale sull'immagine.

Questi effetti, rilevanti in linea di principio per comprendere meglio il senso delle trasformazioni sul flusso eseguite, risultano però, da uno studio sulle curve di luce, essere sostanzialmente trascurabili.

Consideriamo la distribuzione del χ^2 calcolato rispetto alla media globale sulle curve di luce (Fig. 2.20), e la distribuzione differenza normalizzata pixel per pixel di ogni immagine rispetto a una di riferimento (indichiamo rispettivamente con μ e σ la stima del valor medio e della dispersione di questa distribuzione, Fig. 2.21). Dall'analisi dei grafici non emerge nessuna differenza significativa tra i due approcci.

Nessuna differenza apprezzabile emerge del resto dal confronto diretto di alcune curve di luce.

Questo risultato non è sorprendente nella misura in cui abbiamo già rilevato la potenziale capacità insita nella operazione di stabilizzazione del *seeing* di correggere eventuali problemi legati alla valutazione dei coefficienti dell'allineamento fotometrico. Da questo punto di vista, cioè, vediamo emergere una sorta di degenerazione tra questi due coefficienti.

Quello che è interessante, sottolineiamo ancora, è la verifica che questo metodo funziona, e questo

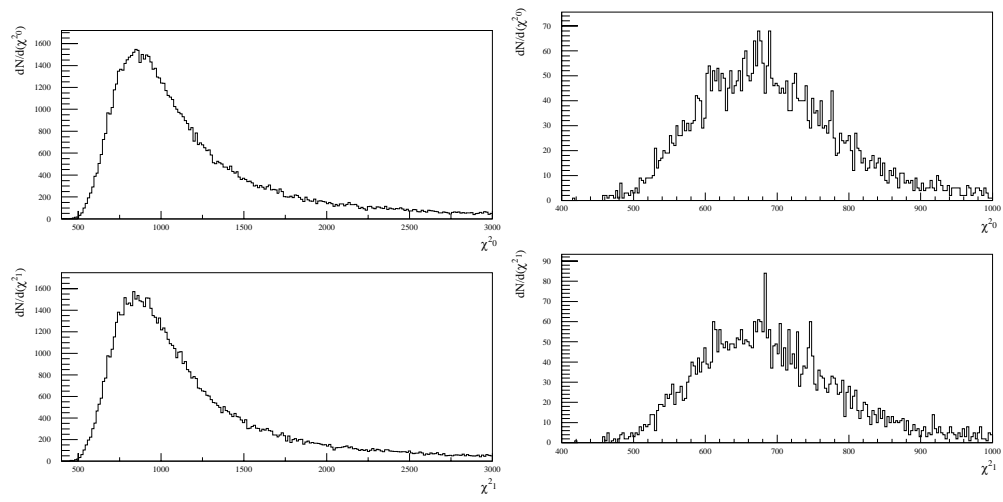


Figura 2.20: Distribuzione del χ^2 (2.16), come ottenuto con l'approccio tradizionale (in alto) e il nuovo, per tutte le curve di luce (a sinistra) e per una selezione di curve "stabili".

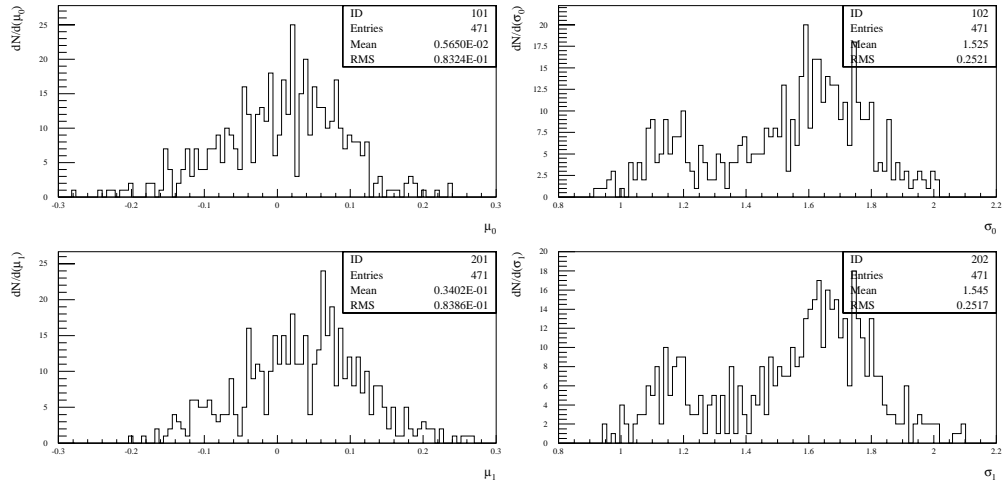


Figura 2.21: Distribuzioni per il valor medio, a sinistra, e la dispersione della (2.17), in basso i risultati ottenuti con il nuovo approccio di correzione.

indipendentemente dalla presenza di un gradiente di luminosità.

E' possibile fare alcune osservazioni conclusive sulla questione degli allineamenti considerando ora l'aspetto "spaziale" del problema.

In linea di principio non ci sono ragioni per ritenere che i coefficienti di correzione, qualora determinati in regioni distinte dello stesso campo, tipicamente parliamo di regioni di 400×400 pixel circa, siano diversi. Eppure rileviamo, per i coefficienti usati nel primo approccio (quando presi separatamente, coefficiente di allineamento fotometrico a e b , piuttosto che di correzione del *seeing* α), spostandoci da una parte all'altra dell'immagine, delle differenze anche significative. I coefficienti determinati nel secondo approccio, ovvero quelli del primo ma combinati opportunamente, mostrano invece di rimanere costanti su tutta l'immagine. Questo comportamento riflette meglio quello che ci aspettiamo che succeda, e giustifica in un certo modo l'approccio unificato alla correzione.

Nella Fig. 2.22 (a sinistra) mostriamo le variazioni relative del coefficiente di assorbimento a rispetto a quelle del coefficiente di luminosità del fondo del cielo b come calcolati alle due estremità dell'immagine (gradiente di luminosità forte e debole). Dati i valori tipici di questi coefficienti, vediamo come questi effetti siano rilevanti e come risultano correlati. Al proposito, possiamo di nuovo ricordare come è proprio dove l'effetto della Luna è importante, e quindi b elevato in valore assoluto, che l'effetto del *riflesso*, e di

conseguenza l'“errore” sul calcolo di a , che viene sottostimato, è maggiore.

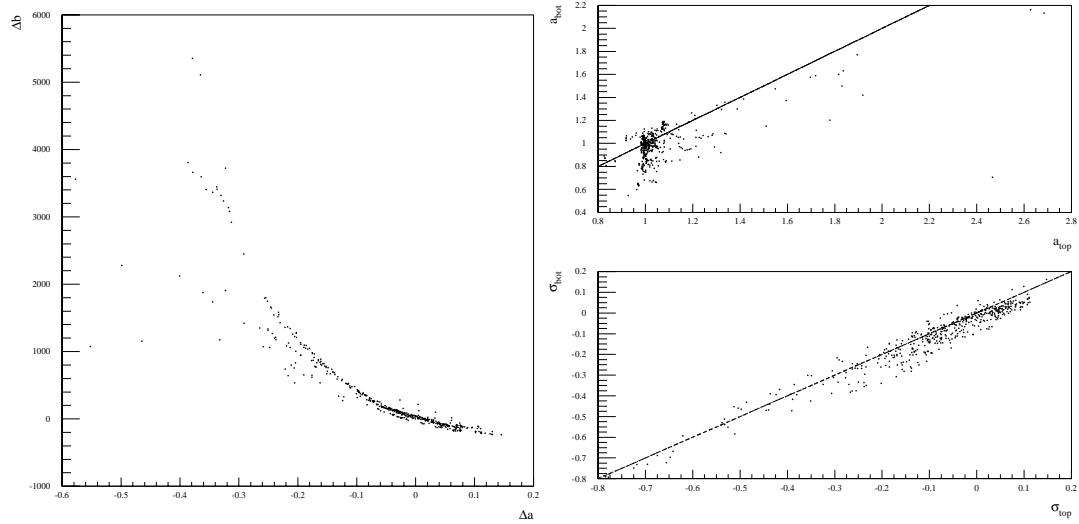


Figura 2.22: Relazione tra le differenze dei coefficienti di allineamento fotometrico valutati in regioni differenti dell'immagine (a sinistra), e variazioni nello spazio del coefficiente di assorbimento (in alto) e del coefficiente globale di correzione.

Nella Fig. 2.22, a destra, la relazione tra il coefficiente di assorbimento come calcolato in una regione di basso gradiente (a_{bot}) in funzione della stessa quantità calcolata in una differente regione, con elevato gradiente (a_{top}). Specie per valori piccoli di a sono evidenti delle forti differenze. In basso, calcolato nelle stesse due regioni, il coefficiente σ globale di correzione, che risulta uniforme su tutto il campo. In tratto continuo è rappresentata la retta $y = x$.

Nonostante queste ultime osservazioni, che piuttosto suggeriscono la pertinenza di un approccio di correzione unificato, e anche in considerazione del fatto che in nessun momento dell'analisi delle curve di luce vengono di fatto utilizzate le immagini allineate solo fotometricamente, non abbiamo reali motivi per preferire un approccio all'altro. In pratica, sulle immagini composte (nel senso chiarito nel paragrafo seguente) in entrambi i colori e sulle immagini non composte del filtro R , lavoriamo con immagini ridotte con il primo approccio, mentre le immagini I delle curve di luce con le immagini non composte sono state ridotte seguendo il secondo approccio.

2.3.5 Composizione delle immagini

L'opportunità data dall'elevato numero di immagini acquisite ogni notte sullo stesso campo di M31, con entrambi i filtri, può essere sfruttata per differenziare le strategia di selezione e di analisi del segnale. E' possibile infatti costruire curve di luce con un punto in corrispondenza a ogni notte di osservazione, piuttosto che curve di luce con un punto per ogni immagine. Nei due casi la ricerca può essere finalizzata a eventi di *microlensing* con caratteristiche differenti (tipicamente, eventi di lunga e breve durata rispettivamente).

Un aspetto rilevante è legato al rapporto segnale su rumore per ogni punto della curva di luce. Come abbiamo ricordato, l'errore statistico associato alle misure di flusso è proporzionale alla radice quadrata del flusso osservato, per cui

$$\frac{\text{segnale}}{\text{rumore}} = \frac{\phi}{\sigma(\phi)} \propto \sqrt{\phi}. \quad (2.35)$$

Nel momento in cui costruiamo una immagine *equivalente* componendo il flusso di N immagini, questo rapporto migliora, rispetto a quello delle singole immagini componenti, essenzialmente per un fattore \sqrt{N} . Questo si ottiene, in modo identico, sia costruendo tale immagine semplicemente *sommando* tutte le immagini, sia facendo un'operazione di *media*.

Nel primo caso, è semplicemente come prendere un'immagine con un tempo di esposizione N volte più lungo, tempo durante il quale si sta effettivamente raccogliendo più informazione. Sia l'immagine

con tempo di esposizione unitario ϕ_1 con $\sigma(\phi_1) = \sqrt{\phi_1}$, indicata l'immagine con tempo di esposizione N volte più lungo ϕ_N , scrivendo *formalmente*, $\phi_N = N \cdot \phi_1$, allora $\sigma(\phi_N) = \sqrt{N \cdot \phi_1}$.

La media aritmetica del flusso pixel per pixel è un'operazione del tutto equivalente a questa. Se

$$\langle \phi \rangle = \frac{\sum \phi_1}{N}, \quad (2.36)$$

allora, sempre formalmente (e supponendo l'errore identico per tutte le immagini)

$$\sigma^2(\langle \phi \rangle) = \sigma^2\left(\frac{\sum \phi_1}{N}\right) = \frac{\sigma^2(\sum \phi_1)}{N^2} = \frac{\sum \sigma^2(\phi_1)}{N^2} = \frac{\sum \phi_1}{N^2} = \frac{\langle \phi \rangle}{N}. \quad (2.37)$$

In modo identico in entrambi i casi il rapporto segnale su rumore migliora, rispetto a quello delle singole immagini, di un fattore proporzionale alla radice quadrata del numero di immagini mediate, N , ovvero proporzionale al tempo di esposizione equivalente della nuova immagine

$$\frac{\text{segnale}}{\text{rumore}} = \frac{\phi_N}{\sigma(\phi_N)} = \frac{\langle \phi \rangle}{\sigma(\langle \phi \rangle)} = \sqrt{N} \cdot \sqrt{\phi_1}. \quad (2.38)$$

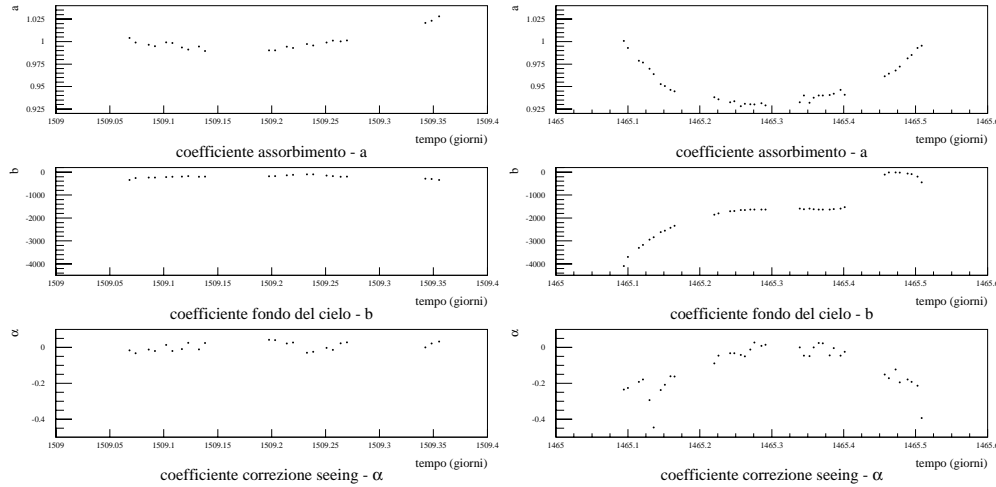


Figura 2.23: La variazione temporale dei differenti coefficienti di normalizzazione del flusso: durante una notte più (a sinistra) e meno “stabile”.

L'operazione di media (2.36) è quindi del tutto equivalente alla presa di una singola immagine con tempo di esposizione più lungo, l'intrinseca limitazione strumentale in questo caso essendo data dai problemi di saturazione della camera CCD, i conteggi di ADU avendo in genere come limite superiore 65535, come anche da possibili problemi di non linearità della risposta dello strumento (per la camera “Echelle” nell'intervallo dinamico consentito fino a 65535 effetti del genere non sono comunque stati rilevati).

L'elevato numero di immagini prese ogni notte disponibili nei dati analizzati può essere però sfruttata in altro modo. Nella prospettiva voler comporre tra di loro immagini più simili possibili, rispetto alle condizioni relative di osservazioni, diviene importante tenere conto del tempo caratteristico del loro variazione. E' allora possibile verificare come questo sia in genere relativamente piccolo, potendo i coefficienti di correzione calcolati variare in modo significativo anche nel corso della stessa notte (questo è vero soprattutto per il coefficiente legato alla variazione del *seeing* Fig. 2.23).

Questa osservazione può quindi essere lo spunto per costruire un'immagine equivalente in modo differente da quello indicato nella (2.36). Nello stesso modo dell'allineamento geometrico, che si fa naturalmente precedere a una qualsiasi operazione di media sulle immagini, si possono considerare le operazioni di correzione del flusso, per le condizioni di fotometria e del *seeing*. Si può inoltre andare oltre la semplice operazione di media aritmetica.

Una obiezione di principio a simili complicazioni potrebbe essere fatta in considerazione del rischio di perdita dell'informazione fisica che potrebbe nascondersi in un'operazione di manipolazione del flusso

poi non più controllabile. Questo non dovrebbe però essere rilevante nel momento dell'analisi di curve di luce costruite con un punto per ogni notte, o comunque composte, in cui dal principio rinunciamo alla conoscenza di quanto avviene su scale temporali più brevi.

Un livello di complicazione minimo rimane comunque quello di comporre tra di loro senza una precedente correzione del flusso solo le immagini per le quali le condizioni di osservazione risultino effettivamente simili, sfruttando così l'elevato numero di immagini per selezionare quelle per cui siano state verificate opportune condizioni di stabilità globali.

Abbiamo eseguito uno studio del problema considerando di nuovo una zona della CCD limitata (400×400 pixel), vicino al centro galattico. Elaborate e compiute differenti composizioni, abbiamo poi confrontato i risultati ottenuti.

Dati i differenti elementi

- tipo di media
 - media aritmetica;
 - media ponderata;
- successione temporale delle diverse operazioni
 - prima delle operazioni di normalizzazione del flusso;
 - dopo le operazioni di normalizzazione del flusso;

questi i diversi approcci analizzati

- 1 - media aritmetica, composizione prima della normalizzazione;
- 2 - media aritmetica, composizione dopo la normalizzazione;
- 3 - media ponderata, composizione prima della normalizzazione;
- 4 - media ponderata, composizione dopo la normalizzazione.

Con media “ponderata” si intende

$$\langle \phi \rangle_p = \frac{\sum \frac{\phi}{\sigma^2(\phi)}}{\sum \frac{1}{\sigma^2(\phi)}}. \quad (2.39)$$

Con composizione “prima” o “dopo” la *normalizzazione* si intende rispettivamente sulle immagini semplicemente allineate geometricamente piuttosto che sulle immagini il cui flusso è già stato trasformato per portarlo nelle condizioni dell'immagine di riferimento (allineamento fotometrico e stabilizzazione del *seeing*). Sottolineiamo che in ogni caso il “peso” è dato dall'errore *statistico* sul valore del flusso. Solo in un momento successivo viene valutato, in modo equivalente per tutti e 4 i casi, l'errore *vero* nel senso specificato in seguito.

Eseguiamo questo confronto su un campione di immagini composto da quelle acquisite durante le prime 35 notti di osservazione con il filtro *R*. Per valutare eventuali differenze tra i diversi approcci di composizione ci avvaliamo dei metodi descritti in precedenza, in particolare dello studio della distribuzione (2.17), di cui valutiamo valor medio e dispersione. L'analisi del valor medio nei vari casi considerati non rivela nessuna differenza. E' invece più interessante considerare la dispersione (σ), legata alla valutazione dell'errore. Ricordiamo che nel caso ideale dovrebbe risultare $\sigma \simeq 1$, indipendentemente dal valore del *seeing*.

La relazione $\sigma_i = \sigma_i(\text{seeing})$ è sostanzialmente equivalente nei diversi casi ($i = 1, \dots, 4$) (Fig. 2.24 in alto a sinistra). Possiamo allora considerare “migliore” la situazione in cui la dispersione è relativamente più piccola. Sempre in Fig. 2.24 mostriamo i risultati di questa analisi comparata.

In questo senso il secondo procedimento (media aritmetica seguita dalla normalizzazione), sembra dare i risultati migliori. Il procedimento che, data questa chiave di lettura, risulta invece meno efficiente è il terzo, media ponderata prima della normalizzazione.

Avendo introdotto nella valutazione della dispersione la stima per l'errore “vero” in cui si introduce un fattore di dispersione δ calcolato da una selezione di pixel “stabili” secondo quanto illustrato nel paragrafo successivo, si è tentati di attribuire questi risultati al diverso peso per i diversi casi che può assumere il coefficiente δ . Per esempio, un coefficiente δ relativo al secondo caso sistematicamente maggiore degli altri spiegherebbe quanto prima rilevato. Questo non succede. Per mostrarlo (vedi la Fig. 2.25), ripetiamo

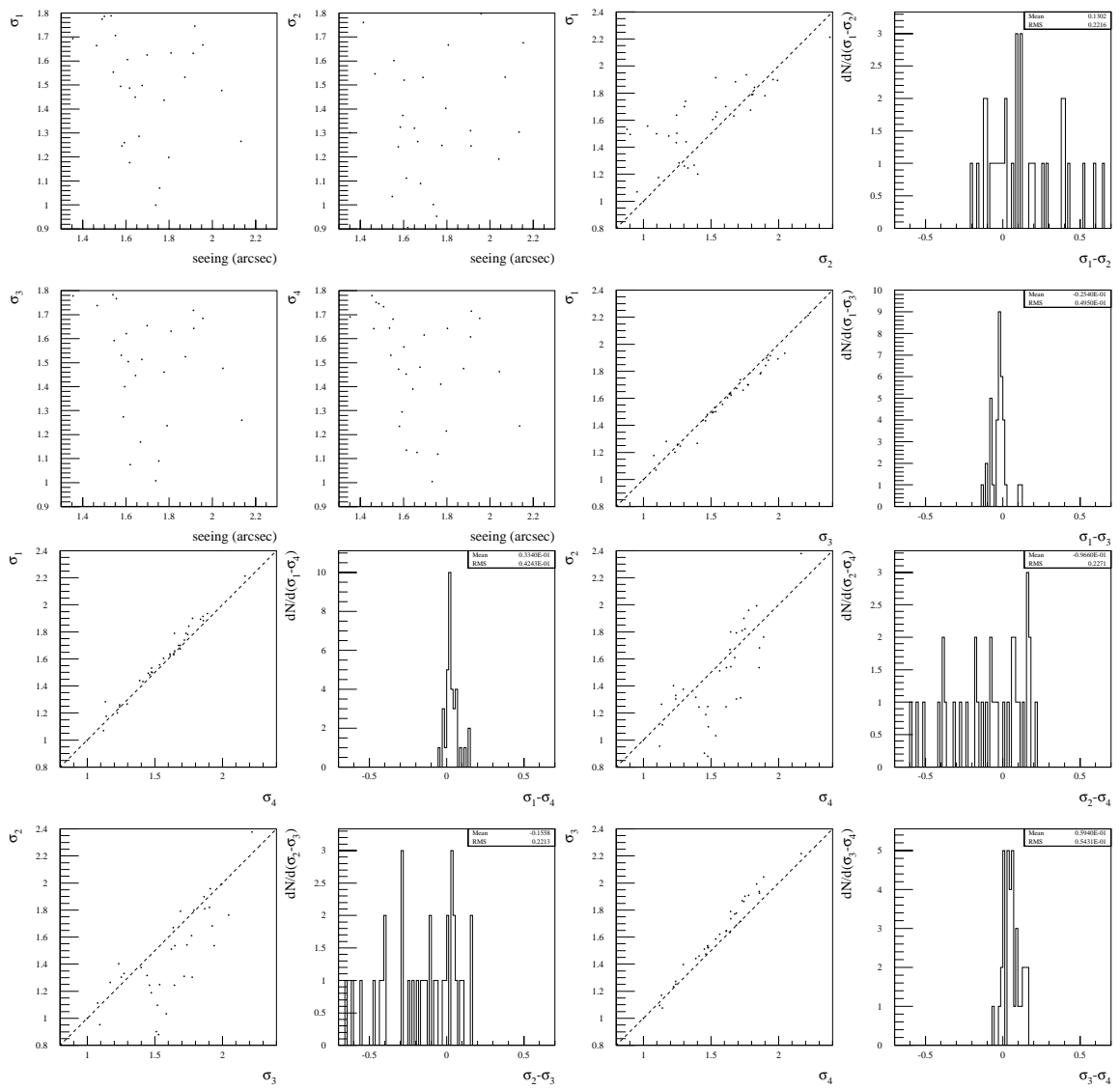


Figura 2.24: Relazione dispersione-seeing nei diversi casi considerati e confronto della valutazione della dispersione.

la stessa analisi considerando direttamente le relazioni tra i coefficienti δ . Questa, tra l'altro, assume un significato differente poiché ora guardiamo ai soli punti selezionati secondo un criterio di “stabilità” sulla curva di luce, e in questa prospettiva può essere considerata più “pulita”.

Troviamo allora conferma delle osservazioni già fatte valutando la dispersione sull'insieme dei punti delle immagini. Unica differenza, a parte una comprensibile generale diminuzione degli effetti, che restano comunque significativi, la sostanziale equivalenza risultante tra il secondo e il quarto procedimento.

Questa ulteriore analisi conferma quindi la preferenza che possiamo accordare, in linea di principio, nelle operazioni di composizione tra le immagini, al caso in cui facciamo seguire questa operazione a quella di normalizzazione del flusso delle immagini.

Gli effetti rilevati rimangono comunque piccoli, e questo viene confermato da un'analisi sulle distribuzioni del χ^2 (2.16). Soprattutto per ragioni di opportunità, la composizione delle N immagini di una notte per la costruzione delle curve di luce con un punto per notte è stata quindi fatta seguendo il primo procedimento (media semplice precedente alle operazioni di normalizzazione). Come già sottolineato, questo metodo rende l'immagine composta risultante equivalente a quella che si sarebbe ottenuta semplicemente con un tempo di posa proporzionalmente più lungo. Approfittiamo, comunque, della possibilità di seguire l'evoluzione delle condizioni di osservazione durante le notti di osservazione per escludere quelle immagini

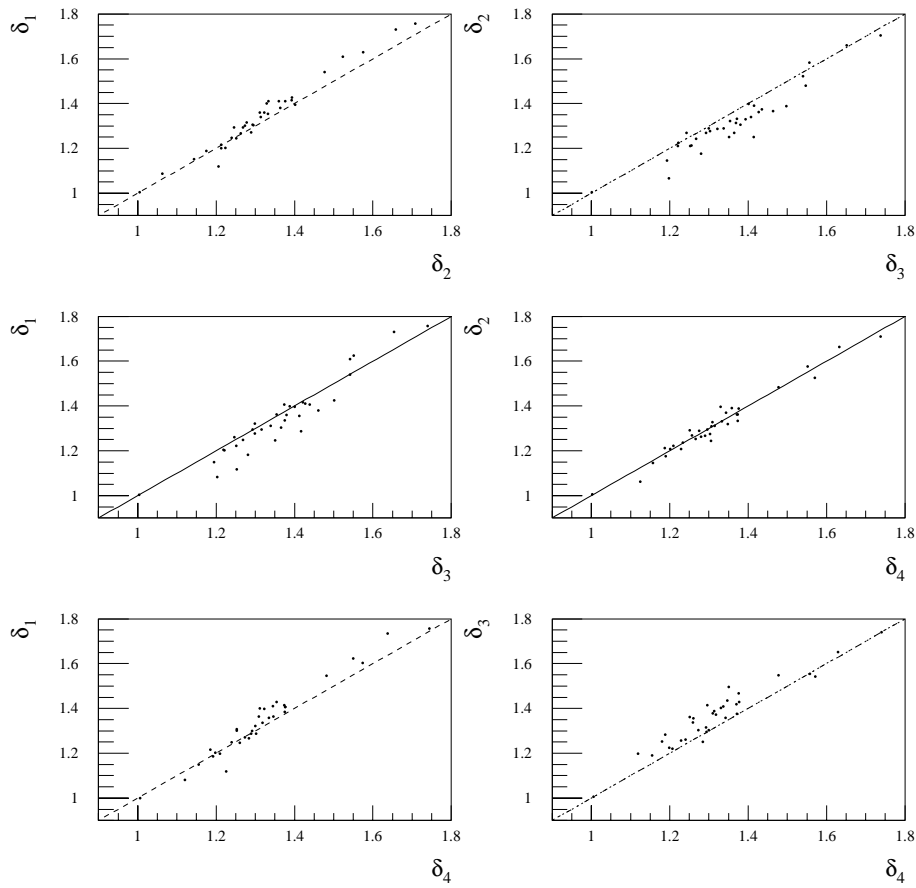


Figura 2.25: Valutazione della dispersione relativa nei diversi casi, ora valutata su un sottoinsieme di pixel appartenenti a curve di luce “stabili”.

che risultano essere state prese in condizioni fotometriche “estreme” (tipicamente quelle con un coefficiente di assorbimento superiore a 2 o inferiore a 0.8, o un coefficiente di fondo del cielo inferiore a -10000) ovvero dove abbiamo registrato delle variazioni anomale degli stessi coefficienti, immagini di dubbia qualità che avrebbero alterato il significato dell’operazione di media (riguardo questo punto, si è rivelata utile l’analisi svolta in relazione al coefficiente η discussa nel paragrafo successivo).

La costruzione di un’immagine equivalente (diciamo la *composizione*) riduce lo spettro possibile di esplorazione precludendo la ricerca di eventi di breve durata. Lo studio di questi, senza comporre le immagini, rimane però inevitabilmente limitato da un peggiore rapporto segnale su rumore, rendendo possibile il rilevamento solo di eventi ad alta amplificazione. Alla ricerca di un punto di equilibrio tra questi due estremi, insieme allo studio delle immagini composte notte per notte e a quello delle immagini non composte, svolgiamo un’analisi dove componiamo un numero variabile di immagini fino a un massimo di 4 (sempre nel corso della stessa notte). Abbiamo escluso la possibilità di comporre gruppi di immagini prese consecutivamente (in genere durante le osservazioni, si alternano sequenze di immagini prese con il filtro R ad altre di immagini prese con il filtro I), perché questi non sono numericamente omogenei per tutte le notti, e questo avrebbe comportato dei problemi legati alla valutazione degli errori relativi sui differenti punti. In questo caso componiamo le immagini dopo le operazioni di correzione del flusso attraverso una media semplice, ovvero, in accordo ai risultati ottenuti, secondo il secondo procedimento esposto in precedenza.

In seguito evidenziamo, attraverso una specifica analisi condotta con le simulazioni Monte Carlo, le differenze tra queste due differenti strategie di analisi.

2.3.6 Analisi sulla stabilità delle immagini e valutazione degli errori

Come già sottolineato, questa fase di pre-analisi delle immagini è essenziale affinché quella successiva, lo studio dell'evoluzione temporale del flusso nei singoli pixel, abbia senso. Del resto, essendo noto il risultato (condizioni globali di stabilità nel senso descritto in precedenza), è ora possibile controllare la qualità del trattamento eseguito.

Prima di dare valutazioni sulle immagini composte, dove pure svolgiamo gran parte dell'analisi successiva, l'efficienza delle operazioni di normalizzazione del flusso, è utile considerare cosa succede sulle immagini prese singolarmente.

In via preliminare, per valutare l'influenza delle fluttuazioni del *seeing* sulla stabilità delle curve di luce facciamo una breve analisi concentrandoci su due notti in particolare. Per questo motivo introduciamo un altro tipo di analisi della stabilità. Lungo una curva di luce con N punti possiamo valutare la media del flusso lungo un dato numero $n < N$ di misure consecutive. Dati gli $N - n + 1$ valori della media così ottenuti, scegliamo il valore *minimo*. E' individuato in questo modo anche il numero dell'immagine a partire dalla quale questa media viene calcolata (numerando per questo le immagini lungo la curva di luce da 1 a N , sia questa in particolare la numero $\eta \in 1, \dots, N - n + 1$). Su di una curva di luce "stabile", η dovrebbe assumere con uguale probabilità qualunque valore nell'intervallo consentito, quindi, dato un insieme di curve di luce "stabili", la distribuzione di valori di η dovrebbe risultare uniforme.

In pratica calcoliamo per ogni pixel la media ponderata

$$\bar{\phi}_n^{min} = \min \left\{ \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\phi(t_{i+j})}{\sigma^2(\phi(t_{i+j}))}, \quad i = 1, \dots, N - n + 1 \right\}, \quad (2.40)$$

e il valore di η associato.

Consideriamo in particolare due notti, una con $N = 38$, con condizioni di *seeing* fortemente variabili, l'altra con $N = 23$ e condizioni di *seeing* relativamente più stabili, per le quali analizziamo le relative distribuzioni per η , avendo valutato la media in entrambi i casi lungo 3 immagini consecutive.

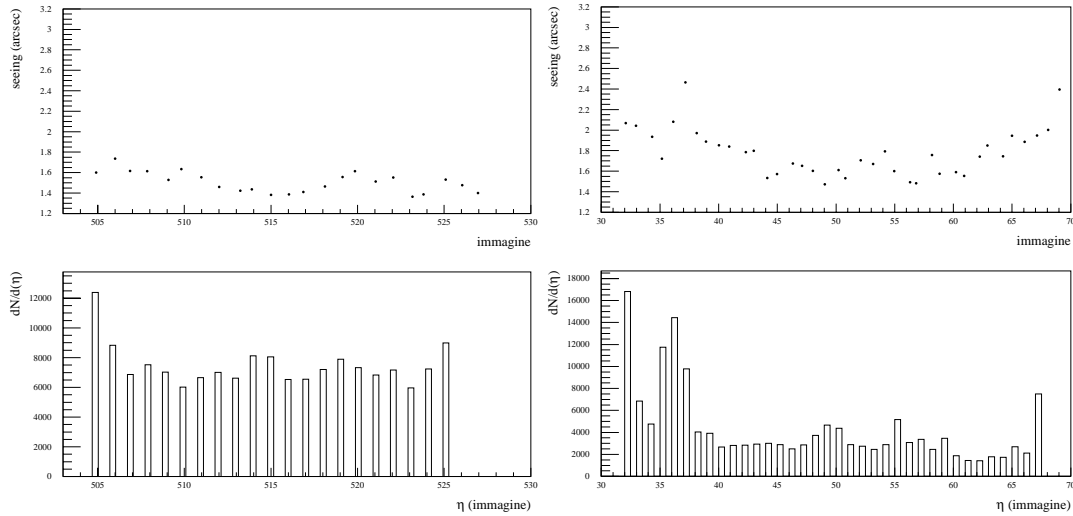


Figura 2.26: Variazione del *seeing* e distribuzione per η per due notti di osservazione.

Vediamo allora una netta differenza tra la notte con condizioni di *seeing* stabili (a sinistra nella Fig. 2.26) rispetto alla notte con condizioni di *seeing* fortemente variabili, dove solo nel primo caso osserviamo l'aspettata distribuzione uniforme per η . E' inoltre evidente, specie nel secondo caso, una correlazione con le condizioni di variazione del *seeing*, in particolare con le serie consecutive di immagini con valori elevati del *seeing*. Un'analisi dettagliata mostra che sono piuttosto i pixel il cui flusso è superiore al valore del *mediano* sulle immagini con *seeing* "cattivo" e che quindi, ricordando il procedimento di stabilizzazione del *seeing*, dovrebbero "risalire" per portarsi al livello dell'immagine di riferimento, i responsabili di questa sistematica. Per quanto meno evidenti, simili sistematiche compaiono anche in corrispondenza delle serie consecutive di immagini con buon *seeing* (e in questo caso sono i pixel per cui il valore del

flusso è inferiore al *mediano* quelli per cui la correzione non è sufficiente a portarli al livello dell'immagine di riferimento).

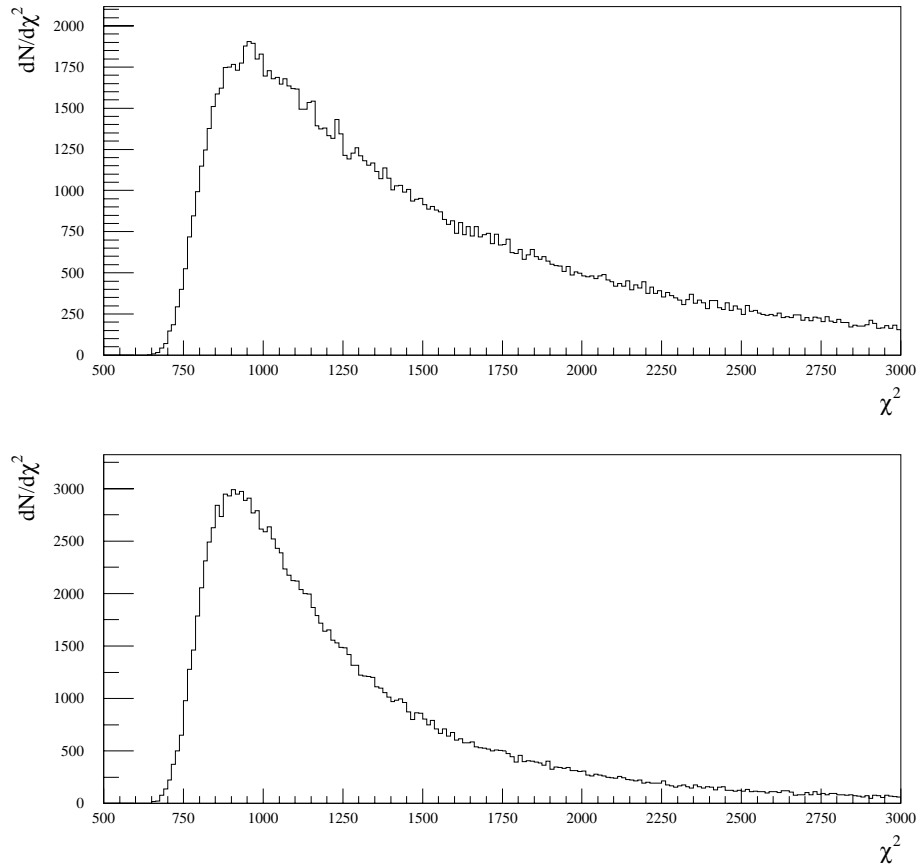


Figura 2.27: Distribuzione del χ^2 prima (in alto) e dopo la calibrazione del *seeing*, con immagini *R* non composte.

Un'analisi simile, condotta però calcolando il valore *massimo* della media su n punti consecutivi, mostra coerentemente dei risultati del tutto equivalenti.

E' importante sottolineare che, come è stato verificato, questi effetti sistematici lungo la dimensione temporale *non* hanno una corrispondenza nella dimensione spaziale delle immagini.

Simili considerazioni sono state utili per valutare diversi problemi legati alle condizioni di normalizzazione del flusso sulle immagini, ci hanno permesso in particolare di individuarne, e quindi di escluderne dall'analisi, alcune affette da caratteristiche "patologie".

Torniamo a considerare l'insieme delle immagini, e in particolare analizziamo cosa succede sulle immagini allineate fotometricamente (dove abbiamo tenuto conto degli effetti del *riflesso*) *prima* e *dopo* la calibrazione del *seeing*, questo con gli strumenti discussi. Analizziamo allora la distribuzione (2.16). Il valore modale, la migliore indicazione della media in questa situazione in cui le "code" della distribuzione sono rilevanti, si avvicina ragionevolmente al numero di gradi di libertà (consideriamo il campione delle ~ 860 immagini *R* "Echelle-Target"). Vediamo del resto come la dimensione delle code della distribuzione siano strettamente legate agli effetti del *seeing*. In seguito all'operazione di stabilizzazione, la distribuzione assume come deve una forma più gaussiana. Guardando al valore modale della distribuzione nella Fig. 2.27 ritroviamo lo stesso fattore ~ 1.2 osservato in precedenza al momento della discussione della dispersione lungo le curve di luce.

Lo studio delle distribuzioni, per ogni tempo fissato, (2.17), ci consente invece di apprezzare la qualità dell'allineamento fotometrico e di fare altre considerazioni sulla stima degli errori, questo in particolare rispetto alle condizioni del *seeing*. Ne valutiamo per questo il valor medio ($\equiv \mu$) e la dispersione ($\equiv \sigma$) interpolando la distribuzione con una gaussiana (che ci aspettiamo sia una gaussiana normale, con $\mu = 0$ e $\sigma = 1$).

Consideriamo la distribuzione e la dipendenza dal *seeing* del valor medio calcolato *prima* e *dopo* la calibrazione del *seeing* (Fig. 2.28).

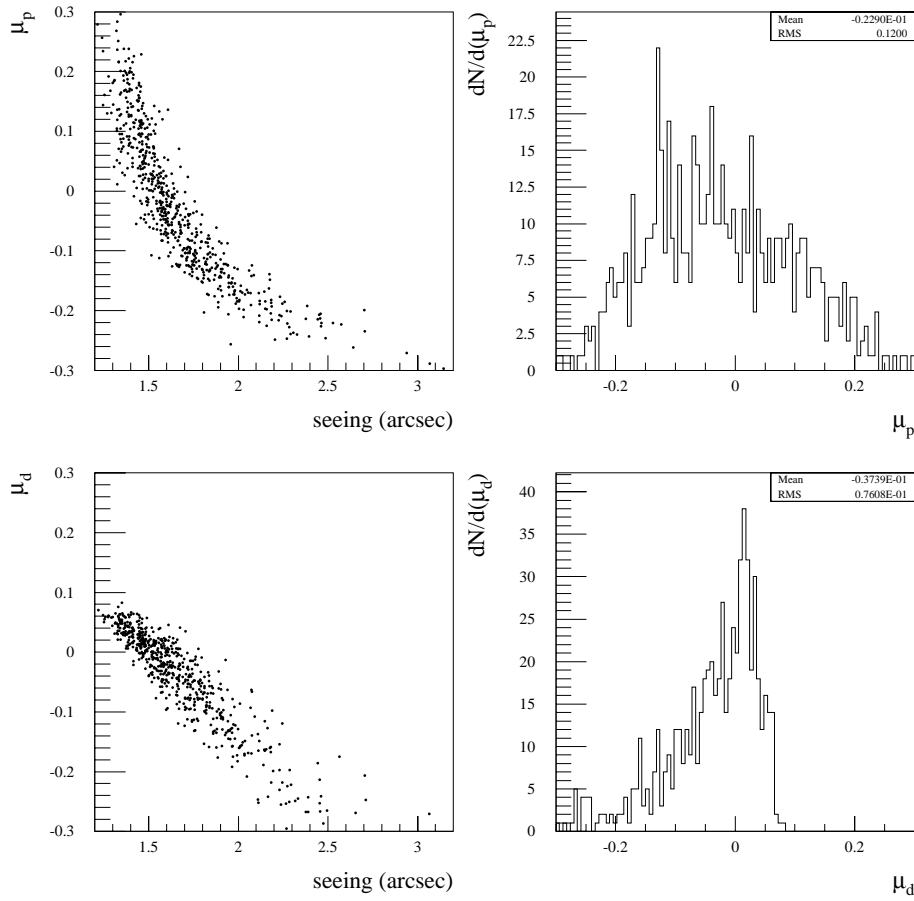


Figura 2.28: Distribuzione e dipendenza dal *seeing*, prima (in alto) e dopo le operazioni di calibrazione del *seeing* per il valor medio della (2.17).

La distribuzione risulta correttamente centrata attorno al valore aspettato, mentre osserviamo una non trascurabile dipendenza dal *seeing*. Questa viene parzialmente corretta (specie per le immagini di buon *seeing*) dalla operazione di stabilizzazione del *seeing* (questo può essere letto come un elemento a favore dell'ipotesi, già discussa, di come l'operazione di stabilizzazione del *seeing* svolga un ruolo effettivo anche rispetto all'allineamento fotometrico).

Consideriamo ora la distribuzione per la dispersione. L'errore considerato è sempre quello statistico, solo corretto dall'introduzione della sistematica (che non influisce, in media, più del $\sim 10\%$ sull'errore totale) sulla valutazione di $\sigma(\alpha)$ (secondo l'espressione (2.45) discussa in seguito).

Osserviamo allora, prima della stabilizzazione (Fig. 2.29 in alto), una significativa dipendenza della dispersione dal *seeing*.

Cerchiamo di decorrelare la dispersione dagli effetti del *seeing* e dall'influenza delle curve "agitate". Per questo, selezioniamo su ogni immagine un campione di pixel le cui relative curve di luci appaiono poi "stabili" (di nuovo vediamo come le dimensioni spaziale e temporale dell'analisi siano interdipendenti), dove l'unico contributo rimasto all'errore dovrebbe quindi essere quello dovuto ai processi di conteggio, questo per correggere in media l'errore su tutte le curve dell'immagine.

Come criterio di stabilità usiamo quello basato su una selezione dei pixel per cui la distanza normalizzata tra la media *globale* e la media (2.40) (calcolata su 24 punti consecutivi, diciamo ϕ_{base}) sulla curva di luce sia "piccola"

$$\frac{\bar{\phi} - \phi_{base}}{\sigma} < \epsilon, \quad (2.41)$$

dove σ è qui l'errore statistico di conteggio associato alla quantità al numeratore. La scelta di ϵ è fatta in

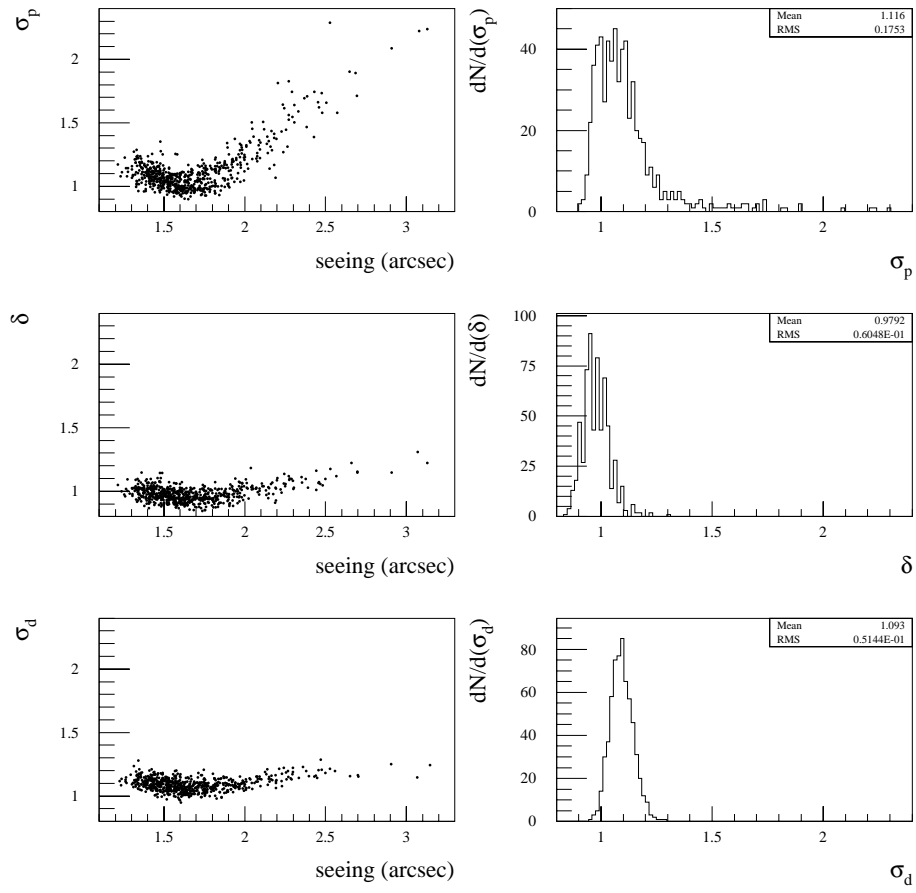


Figura 2.29: Distribuzioni e relazione con il *seeing* per la dispersione valutata della (2.17) prima (in alto) e dopo la calibrazione del *seeing*. Con δ viene indicata la stessa dispersione valutata su un sottoinsieme dei pixel.

modo da restringersi al più piccolo campione che sia ancora spazialmente uniforme nella regione dell'immagine considerata, variando leggermente il valore effettivamente usato leggermente nelle diverse zone. Come valore tipico scegliamo $\epsilon = 1.6$, tale che selezioniamo circa il 2% dei punti di ogni immagine. Diciamo δ la dispersione della (2.17) valutata su questo insieme di punti.

La selezione dei punti e il calcolo della dispersione δ viene fatta naturalmente a partire dal flusso dell'immagine dopo la calibrazione del *seeing*.

La stessa dispersione δ , calcolata su questo sottoinsieme di punti (Fig. 2.29 al centro), risulta ora indipendente dal *seeing*, ed assume come ci aspettiamo valori $\delta \sim 1$. Anche su tutto l'insieme dei punti dell'immagine, dopo la calibrazione del *seeing*, vediamo questo effetto praticamente sparire (Fig. 2.29 in basso, σ_d).

Nel caso delle immagini composte, al contrario, la correlazione tra la dispersione e il *seeing* non viene eliminata dalla calibrazione del *seeing*. Già l'analisi della distribuzione del χ^2 , prima della stabilizzazione del *seeing*, rivela una maggiore patologia rispetto al caso delle immagini non composte, risultando un valore modale ~ 150 per 42 punti sulla curva di luce (Fig. 2.31 in alto). Quindi, in seguito alla calibrazione del *seeing*, i valori di δ (valutato, ricordiamo, partendo dalla sola stima statistica dell'errore) risultano significativamente maggiori (la relativa distribuzione è centrata attorno a ~ 1.5), e più dispersi rispetto ai valori del *seeing* che nel caso delle immagini non composte prima considerato (Fig. 2.30).

La selezione dei pixel "stabili" può quindi nel caso delle immagini composte essere letta come tesa a isolare gli effetti dovuti alle operazioni di composizione che non possiamo controllare attraverso la stima statistica dell'errore. La permanenza degli effetti di correlazione indica allora la necessità di una migliore valutazione dell'errore (diciamo σ_{vero} in contrapposizione alla sua stima statistica σ_{stat}).

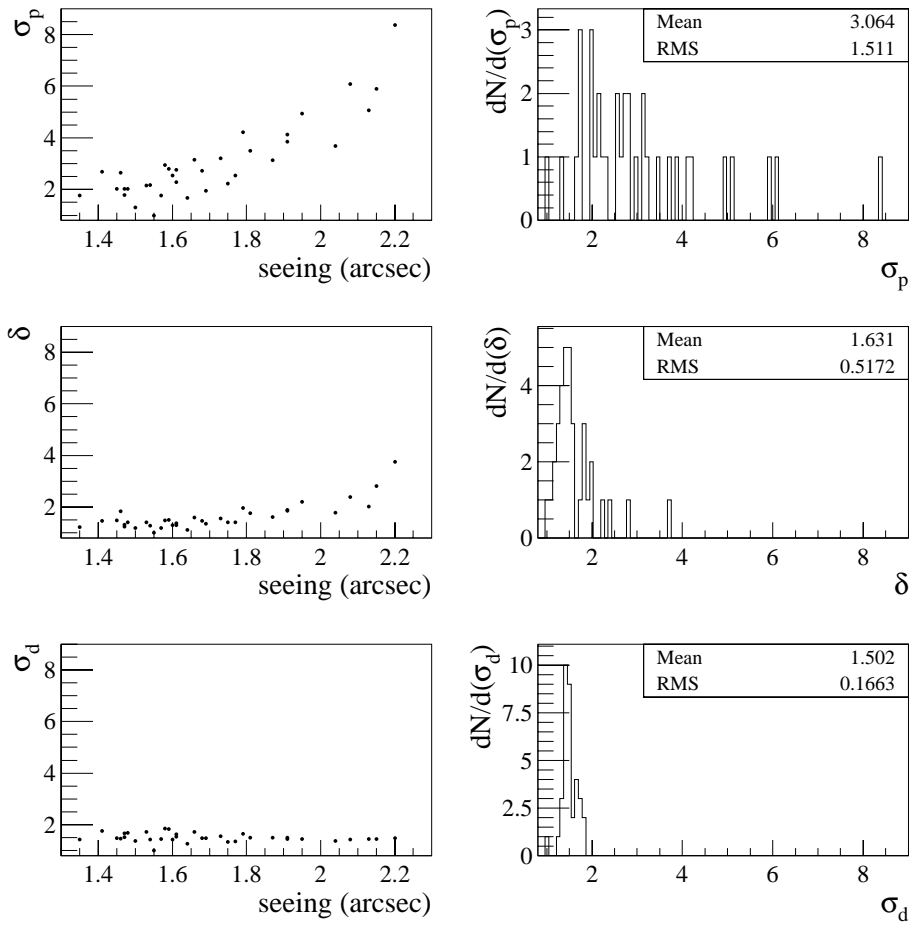


Figura 2.30: Come nella Fig. 2.29, per le immagini composte.

In pratica, se leggiamo δ come una “dispersione efficace” per cui

$$\sigma_{vero}^2(\Phi_c - \Phi_R) = \delta^2 \sigma_{stat}^2(\Phi_c - \Phi_R), \quad (2.42)$$

dove l’errore associato all’immagine di riferimento coincide, per costruzione, con quello statistico

$$\sigma_{vero}^2(\Phi_R) = \sigma_{stat}^2(\Phi_R), \quad (2.43)$$

abbiamo la nuova stima dell’errore

$$\sigma_{vero}^2(\Phi_c) = \delta^2 \sigma_{stat}^2(\Phi_c) + (1 - \delta^2) \sigma_{stat}^2(\Phi_R). \quad (2.44)$$

In questo modo raggiungiamo una ragionevole stabilità anche per le immagini composte (confrontabile a quello ottenuto sulle immagini non composte), dove dobbiamo tenere comunque presente che stiamo valutando non tanto l’errore assoluto quanto quello rispetto all’immagine di riferimento. Possiamo valutare questo risultato di nuovo attraverso lo studio della distribuzione del χ^2 (Fig. 2.31 in basso).

L’introduzione di questa correzione sulla stima dell’errore sulle immagini non composte (dove $\delta \sim 1$) non ha invece molto significato. Si rivela però utile fare la seguente considerazione, questo anche ricordando il procedimento di stabilizzazione del *seeing*. Tornando alla valutazione dell’errore statistico ricordiamo di avere sempre trascurato l’errore associato alla valutazione dei coefficienti di correzione. Quello associato all’incertezza della valutazione del coefficiente di correzione, legato allo scarto dal mediano α , in particolare è dato da

$$\left(\frac{\Phi_c^{a'} - \tilde{\Phi}_R + \beta}{(1 + \alpha)^2} \right)^2 \sigma^2(\alpha). \quad (2.45)$$

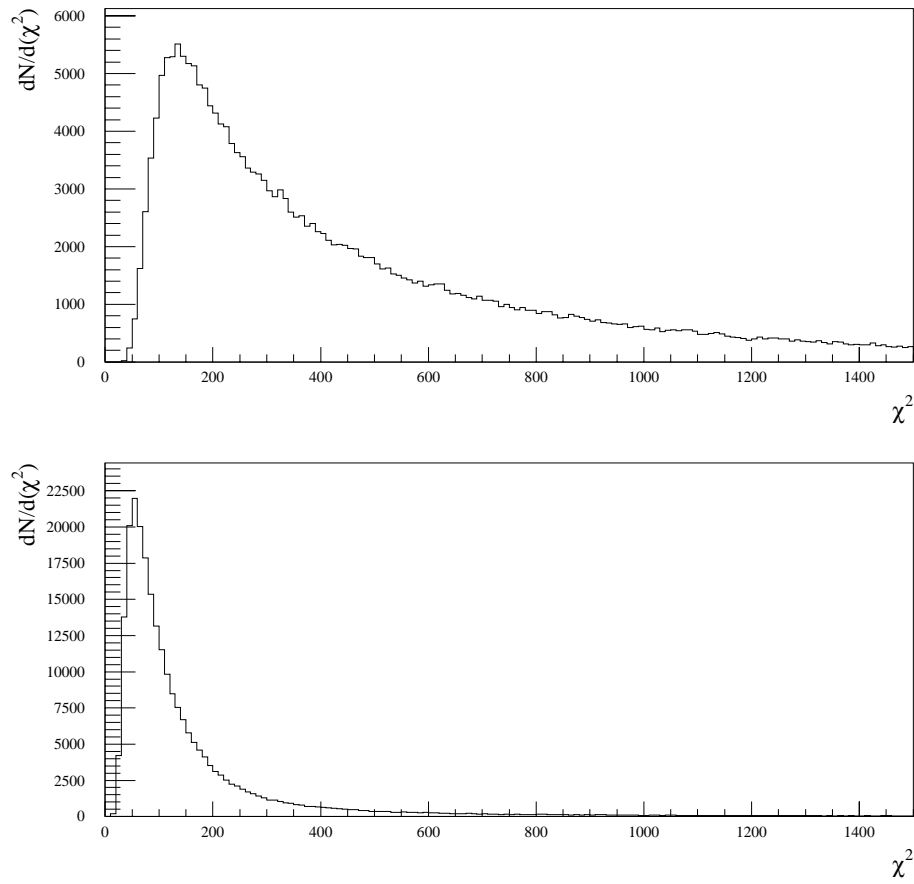


Figura 2.31: Distribuzione del χ^2 prima (in alto) e dopo la correzione del *seeing* (dove nella valutazione dell'errore teniamo conto del fattore δ) per le curve di luce costruite con le 42 immagini composte, filtro *R*.

Notiamo allora come l'importanza relativa di questo termine aumenti con lo scarto dal mediano (il contributo di β è in pratica trascurabile), e per le immagini con peggior *seeing* rispetto a quella di riferimento, dove α , negativo, è più grande in valore assoluto. La stima dell'errore su α valutabile in seguito al fit utilizzato per il calcolo di questo coefficiente è comunque tale che questo termine sia sempre trascurabile rispetto all'errore poissoniano sul flusso. Del resto è proprio dove α è più elevato che abbiamo riscontrato come la sua determinazione fosse più sensibile alla selezione dei punti da includere effettivamente nel calcolo dei coefficienti di correzione. Una valutazione empirica ci porta quindi ad associare alla valutazione di α un errore pari al 10% del suo valore, che consente, sostanzialmente, di tenere nel dovuto conto i problemi intrinseci al modello della correzione, più evidenti appunto per i pixel in cui il valore del flusso è significativamente differente dal quello del *mediano*, e questo soprattutto per le immagini caratterizzate da condizioni di *seeing* particolarmente cattive.

Osserviamo che, mentre la correzione precedente rimane sostanzialmente individuale per ogni pixel, e quindi caratteristica per ogni curva di luce, per risolvere il problema delle immagini composte ci siamo posti in un'ottica differente. Ovvero, abbiamo cercato una migliore valutazione dell'errore a partire da uno studio globale sull'immagine (come per la ricerca dei coefficienti di correzione), attraverso la stima del fattore δ . La motivazione viene proprio dall'operazione di media che sembra introdurre, globalmente, degli effetti che non riusciamo a controllare altrimenti.

Un'analisi specifica sull'importanza relativa del fattore di correzione (2.45) rispetto alla sola valutazione statistica dell'errore, per le immagini composte e non, ha rivelato come questa correzione sia in media inferiore al 7%. Sulle immagini composte la correzione data dalla stima dell'errore (2.44) contribuisce per $\sim 33\%$ (e per questo motivo la (2.45) non viene in questo caso inclusa).

2.3.7 La scelta dell'immagine di riferimento

Abbiamo analizzato i diversi momenti della “normalizzazione” del flusso ricevuto nelle diverse immagini rispetto a una di riferimento data. Discutiamo ora i criteri che guidano la scelta di questa immagine particolare.

L'immagine di allineamento geometrico deve essere la stessa per i due colori e avere delle condizioni di *seeing* relativamente buone, questo in quanto la PSF che viene costruita diventa quella di riferimento nelle operazioni, automatiche, di riconoscimento delle stelle di riferimento nelle altre immagini.

Come immagine di riferimento fotometrico, una distinta per ogni colore, è opportuno scegliere un'immagine presa in condizioni di assorbimento il più possibile simili a quelle delle altre immagini (nel nostro caso abbiamo visto che risulta $a \sim 1$ con una piccolissima dispersione per tutte le immagini), questo per ridurre le correzioni relative necessarie. E' poi opportuno scegliere un'immagine con un valore non troppo elevato del *seeing*, anche se la costruzione e l'utilizzo del *mediano* suggerisce piuttosto il contrario. L'aspetto fondamentale è però legato alle condizioni di luminosità di fondo del cielo. Queste devono essere molto basse rispetto a quelle delle altre immagini (nella nostra scelta coerentemente risulta quasi sempre $b < 0$), questo per rendere significativa l'analisi dell'errore “vero” in (2.42), dove è fondamentale che il contributo al fattore di dispersione δ sia effettivamente dominato dagli effetti relativi tra le due immagini coinvolte piuttosto che dall'errore dell'immagine di riferimento (considerato, ricordiamo, coincidente con la sua valutazione statistica). L'importanza di una scelta in questo senso è poi collegata alle considerazioni fatte sul ruolo del *riflesso*, che abbiamo visto essere importante specie per le immagini in cui la luminosità di fondo del cielo è più elevata.

Circa la calibrazione del *seeing* è opportuno scegliere un'immagine di riferimento caratterizzata da condizioni di *seeing* medie (nel nostro caso $\approx 1.6''$). Dato in particolare il carattere *lineare* della correzione degli scarti al mediano, il procedimento di calibrazione risulta infatti naturalmente meno efficace quando questi scarti, e quindi le condizioni di *seeing* relative, diventano importanti.

Sottolineiamo infine che non è necessario che le immagini di riferimento utilizzate nei diversi passaggi di correzione del flusso coincidano tra di loro.

Capitolo 3

L'analisi del segnale

3.1 Introduzione

Nelle sezioni precedenti abbiamo visto come trasformare globalmente il flusso delle immagini per eliminare tutti gli effetti strumentali e normalizzarlo rispetto a quello dell'immagine di riferimento data. Tutto questo lavoro preliminare è finalizzato allo studio delle *curve di luce*, ovvero alla ricerca delle variazioni temporali di flusso proprie degli oggetti astrofisici, in particolare degli eventi di *microlensing*. Abbiamo già illustrato l'approccio peculiare del *pixel lensing*, basato sull'analisi della variazioni di flusso lungo le curve di luce di *tutti* gli elementi unitari di raccolta del flusso dell'immagine (nel nostro caso, il superpixel, quadrato di 5×5 pixel), che permette il riconoscimento di eventi di *microlensing* nel caso in cui la stella sorgente sia *non risolta*, ovvero il cui segnale sia, in assenza di amplificazione, immerso nel rumore di fondo. Il lavoro preliminare svolto rende possibile, ed efficiente, questa ricerca.

E' necessario a questo punto distinguere, tra tutte le curve di luce caratterizzate da una variazione di luminosità, quelle proprie degli eventi di *microlensing*. In particolare è noto che almeno il 50% delle stelle nel centro galattico di Andromeda, la direzione verso cui guardiamo, sono stelle intrinsecamente *variabili*, ulteriori segnali luminosi variabili potendo essere causati da fenomeni esplosivi (*novæ* e *supernovæ*). Questi fenomeni variabili, determinati dalla fisica della sorgente, sono in genere tali che la loro curva di luce presenta caratteristiche differenti quando osservata in differenti intervalli dello spettro. Al contrario gli eventi di *microlensing* sono *acromatici*, e tale caratteristica diventa un segnale distintivo fondamentale.

Come elemento ulteriore di analisi consideriamo due simulazioni (distinte più per ragioni di opportunità che per ragioni concettuali). Da una parte studiamo, su delle curve di luce potenzialmente rilevabili ma costruite a partire da una scelta arbitraria (non fisicamente significativa) dei parametri, l'efficienza dei differenti criteri di selezione, dall'altra otteniamo, simulando le caratteristiche dell'esperimento e della situazione fisica osservata, la chiave di lettura dei risultati, in particolare, la valutazione delle caratteristiche osservabili degli eventi e il loro numero.

Mentre il risultato delle varie operazioni finalizzate a ottenere condizioni globali di stabilità mediante la correzione del flusso delle immagini discussa in precedenza è controllabile, il risultato di questa seconda operazione di filtro, ora puntiamo alla fisica *locale* delle curve di luce, naturalmente non lo è.

Cerchiamo segnali di *microlensing* su tutto il campo di osservazione (con l'esclusione delle stelle risolte). Occorre quindi delineare una strategia di ricerca. Questa si articola sostanzialmente in due punti

- ricerca di pixel¹ che presentano variazioni di luminosità;
- analisi della forma delle curve di luce così selezionate.

Ricordiamo inoltre le caratteristiche dei dati MDM che possono essere messe a frutto in questa analisi

- elevato numero di immagini per notte;
- dati di buona qualità in due colori.

¹Ora e nel seguito ci riferiamo, se non altrimenti specificato, all'oggetto "pixel" riferendoci alla sua caratterizzazione *temporale* di curva di luce, piuttosto che a quella di elemento di raccolta di flusso in ogni immagine a un tempo fissato.

3.2 La ricerca di eventi significativi

Per definire una variazione di luminosità lungo una curva di luce è necessario introdurre una (fondamentale) stima del *fondo*, o *linea di base* (dove insieme alle altre è mescolato il flusso della eventuale stella sorgente). Definiamo il fondo come il valore minimo assunto dalla media ponderata su n punti consecutivi calcolata sui primi $N - n + 1$ punti della curva di luce (dove N è il numero totale delle immagini)

$$\phi_{fondo} \equiv \min \left\{ \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\phi(t_{i+j})}{\sigma^2(\phi(t_{i+j}))}}{\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\sigma^2(\phi(t_{i+j}))}}, \quad i = 1, \dots, N - n + 1 \right\}. \quad (3.1)$$

Una corretta valutazione del fondo è importante nella misura in cui non deve introdurre selezioni artificiali (*bias*) sulla ricerca successiva. L'elemento chiave è la scelta del numero di punti successivi sulla quale si valuta la media:

- n non deve essere troppo piccolo affinché la scelta del fondo non risulti dominata da eventuali effetti sistematici locali (come caso estremo, per $n = 2$, la presenza di due punti sistematicamente al di sotto del fondo effettivo produrrebbe effetti disastrosi, ovvero la sua identificazione come variazione di luminosità con conseguente inevitabile “annegamento” dei segnali reali);
- n non deve essere nemmeno troppo grande, questo al fine di ottenere una stima, la più appropriata possibile, del “fondo” di una curva di luce (dove naturalmente per variazioni di durata comparabile all'intervallo totale delle osservazioni questo sarebbe comunque impossibile). L'aumento di n implica, in genere, un aumento di ϕ_{fondo} , e questo induce a sottostimare, sia nel confronto tra più curve di luce, sia al limite su di una stessa curva di luce, le piccole variazioni di luminosità, “piccole” sia nel senso di valore assoluto dell'amplificazione rispetto al fondo, sia nel senso di brevi e ad alta amplificazione.

Nel caso della ricerca di eventi sulle curve composte abbiamo scelto $n = 6$, essendo questo il numero di punti del più breve periodo di osservazioni in cui è ancora ragionevole aspettarsi di rilevare una significativa variazione di luminosità (il quarto periodo di osservazioni, corrispondente alle notti di giugno 1999). Nel caso di immagini non composte, come per le immagini composte a gruppi di 4, abbiamo scelto $n = 24$, nel primo caso questo corrisponde in media a poco più di una notte di osservazioni, nel secondo a 4 notti.

Calcolato il fondo lungo una curva di luce, consideriamo una variazione di luminosità come significativa se almeno 3 punti consecutivi soddisfano la condizione

$$\phi_{pixel}(t_i) - \phi_{fondo} > 3\sigma(\phi(t_i)), \quad (3.2)$$

dove trascuriamo l'errore sulla stima di ϕ_{fondo} , che data l'operazione di media è molto minore rispetto all'errore sul flusso della singola immagine. Mentre, data una curva di luce, il livello di base è univocamente assegnato, la soglia di 3σ è definita punto per punto. In questo modo si attribuisce una maggiore importanza alle immagini il cui errore è piccolo. La richiesta di almeno 3 punti consecutivi che soddisfano alla (3.2) è una scelta minima, fatta per non escludere dalla selezione eventuali variazioni molto rapide, essendo comunque almeno 3 i punti necessari per caratterizzare un segnale (questa corrisponde tra l'altro alla condizione di “completezza temporale” che introduciamo in seguito). Per definire la fine di una variazione, aspettiamo che almeno 2 punti consecutivi rientrino nel limite dei 3σ .

Osserviamo che in condizioni normali l'amplificazione, già al momento minimo in cui emerge dal fondo, deve comunque essere elevata. Risulta infatti

$$A_{min}(t) \geq 1 + \frac{3\sigma(\phi(t))}{\phi^*}, \quad (3.3)$$

dove ϕ^* è il flusso della sorgente non amplificata. Notiamo che $\sigma \propto \sqrt{\phi_{fondo}/N}$, dove N è il numero di immagini composte acquisite nel corso della stessa notte. Si può allora considerare che per $\phi^* < \sigma$ ($\phi^* > \sigma$), dove comunque risulta $\phi^* \ll \phi_{fondo}$, solo eventi ad alta amplificazione (anche eventi a bassa amplificazione) possono essere rilevati. Per immagini prese con un breve tempo di esposizione (ovvero dove $N = 1$, curve di luce costruite con le immagini non composte), è invece necessaria un'alta amplificazione perché un evento sia osservato. Per quantificare rispetto ai dati questa analisi sarebbe però necessario avere accesso alla quantità ϕ^* .

Per caratterizzare numericamente la variazione rilevata, calcoliamo la probabilità che essa sia stata prodotta casualmente. Ovvero, data l'ipotesi che, in assenza di fenomeni fisici reali di variazione di flusso, la distribuzione dei punti lungo una curva di luce segua una legge gaussiana centrata sul fondo ϕ_{fondo} , con dispersione data da $\sigma(\phi)$, definiamo la funzione di verosimiglianza L come

$$L = -\ln \left(\prod_{i=j}^{m+j} P(\phi > \phi(t_i)) \right), \quad (3.4)$$

dove m è il numero di immagini in cui si osserva la variazione di luminosità, iniziata al tempo corrispondente all'immagine j , e $P(\phi > \phi(t_i))$ è la probabilità di misurare un flusso superiore al valore osservato.

La funzione di verosimiglianza L è crescente nell'improbabilità che una determinata curva di luce si verifichi casualmente rispetto all'ipotesi di stabilità data (questo per le variazioni *positive* di flusso che ci interessano).

Notiamo che la funzione L è insensibile alla forma della curva di luce poiché può assumere valori elevati sia nel caso in cui ci siano pochi punti con elevata amplificazione, sia molti punti a bassa amplificazione. Inoltre, i dati non sono distribuiti in modo uniforme nel corso del tempo durante il periodo di osservazione, essendo piuttosto concentrati nei mesi iniziali (29 delle 42 notti sono concentrate nei primi 3 mesi di osservazione su un periodo totale di 15 mesi), e questo significa che la stessa variazione di luminosità può essere rilevata con valori di L anche molto differenti al variare dell'istante di massima amplificazione. Questo comporta che la variazione potrebbe non essere rilevata. Esiste cioè la tendenza ad attribuire maggiore significatività a una variazione che avviene in una zona della curva in cui ci sono molti punti rispetto a una dove ce ne sono pochi. Abbiamo di questo aspetto una verifica nell'analisi, rilevando proprio in questo periodo le variazioni di luminosità a minore amplificazione.

In presenza di una reale variazione di luminosità più pixel vicini (questo per gli effetti del *seeing* ma anche per la stessa costruzione dei superpixel) tendono a mostrare un aumento della luminosità. Si formano cioè dei *clusters* di pixel. Coerentemente con i criteri di selezione consideriamo come centro "attivo" del *cluster*, quello che dovrebbe contenere la sorgente amplificata, il pixel dove la funzione di verosimiglianza L assume valore massimo.

Osserviamo che il valore della funzione di verosimiglianza è determinato lungo la curva di luce, nella regione in cui la variazione di luminosità è significativa, a partire dal valore del flusso calcolato nei superpixel, ed è una stima *statistica*. Può allora accadere che l'osservazione diretta (se e dove possibile) sulle immagini, dove il valore del flusso è quello del singolo pixel, possa dare delle indicazioni apparentemente contraddittorie sulla posizione del pixel "attivo". Uno studio specifico sui dati di AGAPE [100] ha però mostrato la pertinenza di questa scelta.

3.3 Caratterizzazione del segnale

Ricordiamo le 3 caratteristiche generali di un evento di *microlensing*

- unicità;
- acromaticità;
- forma.

Riguardo al primo elemento, legato alla bassa probabilità aspettata per gli eventi di *microlensing* per cui si può escludere che la stessa sorgente venga amplificata per due volte, va osservato che in un campo denso di stelle, cercando l'amplificazione di oggetti non risolti, è concepibile che uno stesso pixel possa ricevere il flusso di un evento di *microlensing* e di un'altra stella distinta variabile (questo a differenza del *microlensing* su oggetti risolti). La corretta caratterizzazione di un segnale del genere richiederebbe però, oltre che una migliore precisione fotometrica, una base temporale di dati molto più lunga di quella a nostra disposizione, per cui effettivamente escludiamo dall'analisi tutte le curve di luce che mostrano più di una variazione significativa di luminosità.

Allo stesso modo si potrebbe sfumare la categoricità della seconda richiesta per il cosiddetto fenomeno del *blending*. A causa dell'affollamento del campo è possibile che solo una frazione della luce amplificata sia dovuta alla sorgente effettiva, con la parte rimanente attribuibile a una sorgente vicina, non risolta, che può essere fisicamente collegata o meno alla stessa sorgente [159]. E' del resto possibile che la

stessa sorgente di un reale evento di *microlensing* sia una stella variabile, nel qual caso sarebbe difficile distinguere i due effetti. Infine osserviamo che, poiché il flusso della stella sorgente non è in genere noto, la proprietà dell'acromaticità va studiata anche in rapporto al flusso della sorgente rispetto all'amplificazione e al flusso di fondo del campo nei due colori in cui osserviamo, R e I . Discutiamo in seguito come tener effettivamente conto di questa caratteristica.

Il criterio di forma, infine, è legato a una particolare e definita geometria dell'evento di *microlensing*. In prima approssimazione è naturalmente ragionevole cercare eventi nell'approssimazione di *Schwarzschild* (lente e sorgente puntiformi, moto uniforme: la curva di luce detta di *Paczynski*). Teniamo però presente che, nel caso del *microlensing* su stelle risolte, sono state studiate numerose curve di luce, in particolare di eventi *binari*, che si differenziano dall'andamento di una curva di Paczyński, e che proprio questi eventi si sono rivelati le più ricche fonti di informazioni fisiche (permettendo allora lo studio della curva di luce di estrarre un maggior numero di informazioni sul fenomeno). Curve di luce di eventi di *microlensing* in direzione di M31 potrebbero del resto, date le distanze relative osservatore-lente-sorgente, essere caratterizzati da effetti di *sorgente finita*. Analisi del genere richiedono una precisione fotometrica che non è possibile ottenere con i dati a disposizione. Tutta l'analisi sistematica svolta in seguito è stata fatta assumendo un modello di Paczyński per l'evento di *microlensing*.

Una caratterizzazione ulteriore per gli eventi di *microlensing*, rispetto ad altri fenomeni variabili, applicabile alla galassia di Andromeda, è il gradiente della profondità ottica aspettata, di cui abbiamo discusso in precedenza. I due campi di osservazione, Target e Control, sono disposti parallelamente all'asse di M31 ai lati opposti del centro galattico proprio allo scopo di ottimizzare questo studio. Al momento un'analisi completa è stata svolta solo nel campo Target, il campo "lontano", quello per il quale la profondità ottica aspettata è maggiore. Come visto nella descrizione dei dati, è del resto proprio in questo campo che sono state concentrate la maggior parte delle osservazioni (circa il 66% del totale). Il completamento dell'analisi sul campo Control non permetterebbe, al momento, di sfruttare in pieno questa caratteristica. Per renderla significativa sarebbe infatti necessaria una più lunga base temporale (ovvero una maggiore statistica sugli eventi).

3.4 La curva di Paczyński

La variazione temporale del flusso ricevuto in un pixel, ovvero l'equazione temporale di una curva di luce, è data da

$$\phi_{\text{pixel}}(t) = \phi_{\text{fondo}} + (A(t) - 1) \cdot \phi^*. \quad (3.5)$$

In questa espressione si intende che ϕ_{fondo} include anche il flusso della sorgente a riposo, ϕ^* . Con il pedice "pixel" indichiamo l'elemento minimo di raccolta del flusso studiato (il "superpixel" introdotto in precedenza). La frazione di *seeing*, in seguito alla normalizzazione del flusso, può essere considerata una costante per tutti i punti lungo la curva di luce e il suo valore inglobato in ϕ^* che quindi andrebbe più correttamente letta come la frazione di flusso della sorgente a riposo contenuta nel superpixel (frazione che abbiamo visto essere uguale a ~ 0.87). Questo fattore entra poi nella valutazione della magnitudine delle variazioni di luminosità. In generale infatti, nemmeno al massimo dell'amplificazione il segnale della stella sorgente è risolto, per cui ne valutiamo la magnitudine a partire dal flusso raccolto in un superpixel. La pertinenza di questa procedura è stata verificata su alcune curve di luce particolari, non di eventi di *microlensing*, per le quali è stato effettivamente possibile valutare la magnitudine sia a partire dal segnale risolto (al momento di massima amplificazione, essendo questa molto elevata) della stella variabile, sia a partire dalla valutazione del flusso raccolto nel pixel "attivo".

L'espressione per l'amplificazione $A(t)$, non necessariamente riducibile a un modello analitico, dipende dal fenomeno fisico che sta alla sua origine, che in particolare può o meno essere un evento di *microlensing*. In questo caso, se la geometria dell'evento è tale da rendere l'approssimazione di lente e sorgente *puntiforme* valida (questo anche in relazione alla qualità dei dati sperimentali), è possibile usare la sua espressione analitica. Lo studio della forma della curva di luce si riduce, in effetti, a determinare se e come i dati sperimentali sono compatibili con questa forma analitica data. Per una curva di Paczyński, quella considerata in questa analisi, l'espressione per l'amplificazione è

$$A(t) = \frac{2 + u^2(t)}{u(t) \sqrt{4 + u^2(t)}}, \quad (3.6)$$

dove la dipendenza temporale dell'amplificazione viene da quella del parametro di impatto $u(t)$ per cui

risulta

$$u(t) = \sqrt{\left(\frac{t-t_0}{t_E}\right)^2 + u_0^2}. \quad (3.7)$$

I parametri fisici che caratterizzano la curva sono dunque 5, la luminosità di fondo del cielo, ϕ_{fondo} , il flusso della stella sorgente non amplificata, ϕ^* , e i 3 parametri caratteristici dell'evento, ovvero l'istante di massima amplificazione t_0 , la distanza minima di impatto u_0 e il *tempo di Einstein* t_E . La peculiarità del metodo dei pixel utilizzato consiste nel cercare variazioni di luminosità di oggetti non risolti, per i quali cioè non abbiamo direttamente accesso alla grandezza ϕ^* . D'altra parte, l'ispezione di una curva di luce fornisce indicazioni sulle seguenti 4 grandezze

- il flusso di fondo;
- l'istante di massima amplificazione dell'evento;
- la durata dell'evento Δt ;
- la variazione di flusso osservata durante l'evento $\Delta\phi_0$.

Detti $A_0 \equiv A(t = t_0)$ il valore massimo dell'amplificazione, t_{\pm} gli istanti per cui $A(t = t_{\pm}) = A_0/2$, generalmente si caratterizza la durata dell'evento osservato con $t_{1/2} = t_+ - t_-$, ovvero l'ampiezza temporale dell'evento calcolata quando l'amplificazione è a metà del massimo. E' possibile mostrare che è soddisfatta la relazione (l'amplificazione è simmetrica rispetto a t_0)

$$t_{1/2} = 2 t_E f(u_0), \quad (3.8)$$

dove

$$f(u_0) = \sqrt{-2 - u_0^2 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{-2 + 8u_0^2 + 18u_0^4 + 8u_0^6 + u_0^8 + u_0^3(2 + u_0^2)(4 + u_0^2)^{3/2}}{2u_0^4 + 8u_0^2 - 1}}}. \quad (3.9)$$

La variazione di flusso al massimo dell'amplificazione rispetto al livello del fondo è pari a

$$\Delta\phi_0 = \phi^* \cdot (A_0 - 1). \quad (3.10)$$

L'informazione dei 3 parametri fisici interessanti che caratterizzano un evento, ϕ^* , t_E e u_0 , è in questa descrizione contenuta nei due parametri osservabili $t_{1/2}$ e $\Delta\phi_0$. In particolare il *tempo di Einstein* è assorbito nel parametro di durata effettiva dell'evento, dipendendo questo anche dal parametro minimo di impatto.

Il caso di forte amplificazione è caratterizzato dalla validità dell'approssimazione

$$A(t) \simeq \frac{1}{u(t)}, \quad (3.11)$$

(e questo dipende allo stesso tempo dalla geometria dell'evento, u_0 , il cui valore ha una distribuzione attesa uniforme, e dalle sue caratteristiche fisiche, t_E). In questo caso, per l'ampiezza temporale dell'evento a mezza altezza, vale l'espressione approssimata

$$t_{1/2} \simeq 2\sqrt{3} t_E u_0. \quad (3.12)$$

L'espressione generale dell'evoluzione temporale di una curva di luce (3.5) si può riscrivere in questo caso come

$$\phi_{pixel}(t) = \phi_{fondo} + \frac{\Delta\phi_0}{\sqrt{1 + 12 \left(\frac{t-t_0}{t_{1/2}}\right)^2}}, \quad (3.13)$$

dove compaiono i soli 4 parametri *osservabili* introdotti. E' importante osservare che in questo caso, dati i parametri fisici ϕ^* , u_0 e t_E , le trasformazioni $\phi^* \rightarrow \alpha \cdot \phi^*$, $u_0 \rightarrow \alpha \cdot u_0$ e $t_E \rightarrow t_E/\alpha$, lasciano invariata l'espressione per il flusso lungo la curva di luce (3.13).

Il problema si pone allora di decidere se tentare per un evento di *microlensing* un'interpolazione dei dati sperimentali con la curva teorica esatta a 5 parametri (espressione (3.5), con l'amplificazione data da (3.6)), piuttosto che con l'espressione approssimata (3.13), dove solo nel primo caso si ha direttamente

accesso alla quantità fisicamente più rilevante, il tempo di Einstein t_E . Nell'analisi non va comunque trascurata l'importanza di poter valutare correttamente anche il flusso di fondo e il momento di massima amplificazione. Il secondo può infatti diventare, dal confronto tra le curve nei due colori, un indizio di eventuali effetti cromatici, mentre il primo è importante perché rappresenta la linea di base da cui si misura l'amplificazione. Nel nostro caso, la valutazione del flusso di fondo è complicata dalla limitata base temporale delle osservazioni e dal non regolare campionamento (quest'ultimo aspetto riguarda specialmente gli eventi di lunga durata).

La determinazione dei parametri viene fatta minimizzando il χ^2 con un fit *non lineare*.

3.5 L'analisi dei residui

I parametri della curva di luce di Paczyński sono determinati con un fit non lineare imponendo la minimizzazione della funzione χ^2 . A posteriori abbiamo bisogno di verificare l'affidabilità statistica dei risultati ottenuti. Questo è un problema generale in tutti i casi di *regressione*, ed è un genere di analisi che si basa sullo studio dei *residui* ridotti, r_i , ovvero delle differenze, al tempo t_i , tra il valore predetto dalla curva interpolante $\hat{\phi}(t_i)$, e il corrispondente valore osservato $\phi(t_i)$, “pesati” dividendo per l'errore associato alla misura

$$r_i = \frac{\phi(t_i) - \hat{\phi}(t_i)}{\sigma(\phi(t_i))}. \quad (3.14)$$

I residui possono essere pensati come gli errori osservati se il modello assunto è corretto. L'analisi di regressione del resto si basa su alcune ipotesi riguardanti gli errori. Se il modello utilizzato è corretto, i residui dovrebbero esibire una tendenza che conferma le assunzioni fatte, o che almeno non le contraddice. I test di ipotesi ci consentono allora di affermare che sulla base dei dati a disposizione non abbiamo ragione di ritenere che non siano corrette (in altre parole, non ci assicurano che lo siano).

In particolare, per valutare la *distribuzione* dei residui e studiare eventuali effetti di *correlazione temporale* che farebbero venire meno l'ipotesi di *indipendenza* statistica tra i residui, ricorriamo rispettivamente ai test di ipotesi di Kolmogorov-Smirnov e di Durbin-Watson.

Il test di Kolmogorov-Smirnov (e.g. [128]) consente di verificare se un certo campione statistico appartiene a una distribuzione data (nel nostro caso, una gaussiana normalizzata). A tal fine si dispongono in ordine progressivo i residui e se ne costruisce la funzione cumulativa, che viene poi confrontata con quella della distribuzione test assegnata. In particolare sia D_n il massimo del valore assoluto della differenza tra le due funzioni per un campione di n elementi. Si dimostra quindi che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(D_n < \frac{\lambda}{\sqrt{n}} \right) = Q(\lambda),$$

$$Q(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} (-1)^k e^{-2k^2 \lambda^2}. \quad (3.15)$$

Dato D_n , valutiamo λ come $\lambda = \sqrt{n} D_n$. $Q(\lambda)$ è una funzione crescente di λ con $Q(0) = 0$ e $Q(\infty) = 1$. Il livello di confidenza per rigettare o meno l'ipotesi è $1 - Q(\lambda)$ (nel caso in cui la distribuzione dei residui sia gaussiana, la differenza D_n deve essere piccola). In seguito indichiamo, data una curva di luce e la relativa funzione cumulativa dei residui, $ks \equiv Q(\lambda)$. Al livello di confidenza del 10% concludiamo che il campione dei residui *non* segue una distribuzione gaussiana se questo valore è *superiore* a 0.90.

Il test di ipotesi di Durbin-Watson [53, 54] permette di stimare la probabilità della presenza di una correlazione *lineare* tra residui immediatamente successivi. Viene cioè tenuto conto esplicitamente dell'ordine in cui sono raccolti i dati sperimentali, ovvero del fattore *temporale*. Il caso classico, che qui utilizziamo, primi vicini con dipendenza lineare, è comunque sensibile, in genere, anche a più complessi fenomeni di correlazione, costituendo per questi una sorta di prima approssimazione. In pratica, il test tende a rilevare l'eventuale presenza di sequenze di dati osservati sistematicamente al di sopra o al di sotto della curva teorica predetta dall'interpolazione. Una dimostrazione rigorosa della validità di questo test di ipotesi esiste solo nel caso in cui il modello teorico della curva sia *lineare* nei parametri, l'intervallo tra una misura e la successiva *costante*. Entrambe queste condizioni non sono evidentemente soddisfatte nel caso in esame (fit non lineare di Paczyński, campionamento irregolare dei dati sperimentali). Ci siamo allora assicurati della coerenza dell'utilizzo di questo test in questo contesto con una opportuna simulazione che viene discussa in seguito.

Più formalmente, i termini di errore ϵ_i in un modello di regressione non sono necessariamente indipendenti ma possono essere correlati nel modo seguente

$$\epsilon_i = \rho \epsilon_{i-1} + \delta_i \quad -1 < \rho < 1, \quad (3.16)$$

dove i δ_i , indipendenti, sono distribuiti in modo normale con valor medio nullo e varianza costante. Attraverso la (3.16) si modella l'errore ϵ_i come una frazione ρ dell'errore immediatamente precedente, ϵ_{i-1} , più la componente δ_i . Dati i residui ridotti r_i , l'implementazione del test statistico si basa quindi sul calcolo del coefficiente (un coefficiente di correlazione modificato)

$$dw = \frac{\sum_{i=2}^n (r_i - r_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n r_i^2}, \quad (3.17)$$

utilizzato per verificare l'ipotesi nulla $H_0 : \rho = 0$ contro l'alternativa $\rho \neq 0$.

In assenza di correlazione risulta evidentemente $dw \simeq 2$, nel caso contrario dw si avvicina a 0 piuttosto che a 4. Il valore calcolato di dw va confrontato con quello dei due parametri caratteristici del test, d_L e d_U , il cui valore dipende dal numero di punti n coinvolti nella sommatoria (3.17). Questi definiscono due intervalli, intorno al valore 2, di accettazione, vicino agli estremi, di rigetto. Esistono poi i casi intermedi, dubbi, nei quali il test non è conclusivo. Rigettiamo l'ipotesi anche in questo caso. Riassumendo

- per $dw < d_L$ o $dw > (4 - d_L)$ si rigetta l'ipotesi H_0 ;
- per $d_U < dw < (4 - d_U)$ non si rigetta l'ipotesi H_0 ;
- altrimenti, test non conclusivo (rigettiamo l'ipotesi H_0).

Per n che assume valori nell'intervallo tra 40 e 42 (il numero di punti sulle curve di luce composte), è calcolato (al livello di confidenza del 5%) $d_L = 1.44$ e $d_U = 1.54$, per cui non rigettiamo l'ipotesi di non correlazione (al livello di confidenza del 10%) se risulta

$$1.54 < dw < 2.46. \quad (3.18)$$

L'analisi dei dati discussa nel capitolo successivo rivela come il limite superiore non sia veramente significativo poiché per tutte le curve di luce analizzate non risulta mai $dw > 2.46^2$.

Al livello di confidenza del 1% gli stessi intervalli sono definiti dai valori (per lo stesso numero di punti) $d_U = 1.34$ e $d_L = 1.25$.

Sottolineiamo il senso da attribuire al livello di confidenza, lo stesso in entrambi i casi, dove, nel vernacolo statistico, si testa l'ipotesi nulla contro errori di “tipo I”, ovvero la possibilità di rigettare un'ipotesi quando questa è corretta. Per esempio, nel test di Durbin-Watson si suppone che i residui *non* siano correlati. Rigettare l'ipotesi significa avere una probabilità al livello di confidenza fissato di sbagliare al momento di trarre questa conclusione. Per questo motivo i parametri d_L e d_U al livello di confidenza dell'1% sono più piccoli che a quello del 5%. Nel primo caso manifestiamo una maggiore sicurezza nell'ipotesi di *non* correlazione, e siamo quindi meno disponibili ad assumerci il rischio di sbagliare concludendo il contrario.

Circa la differenza di principio tra i due test, analizziamo una situazione affatto controllabile e facilmente riproducibile numericamente. Consideriamo una distribuzione casuale di valori estratti da una distribuzione gaussiana normale, che possiamo immaginare disposti in successione “temporale”. Il test di Kolmogorov-Smirnov applicato ai residui di questo campione riconosce la distribuzione di origine, il test di Durbin-Watson non rileva alcuna correlazione. Se ora introduciamo un ordinamento nei punti, per esempio selezionando prima tutti quelli con un residuo positivo, il test di Kolmogorov-Smirnov non rileva alcuna differenza, il test di Durbin-Watson, al contrario, rileva la correlazione.

Abbiamo generato casualmente 10000 “curve di luce” di 42 punti ciascuna data una distribuzione gaussiana normale, e applicato ai residui i test di Kolmogorov-Smirnov e di Durbin-Watson. In Fig.3.1 è possibile vedere come i limiti fissati dei coefficienti dei diversi test ($ks = 0.90$ e $1.54 < dw < 2.46$) rigettino l'ipotesi nulla di appartenenza alla distribuzione gaussiana assegnata nel numero aspettato di casi.

In seguito, con un'opportuna simulazione, approfondiamo ulteriormente questo aspetto dell'indipendenza dei due test.

²Osserviamo però come questo sia verificato nell'analisi dei dati sperimentali, ma non nel corso delle simulazioni discusse in seguito.

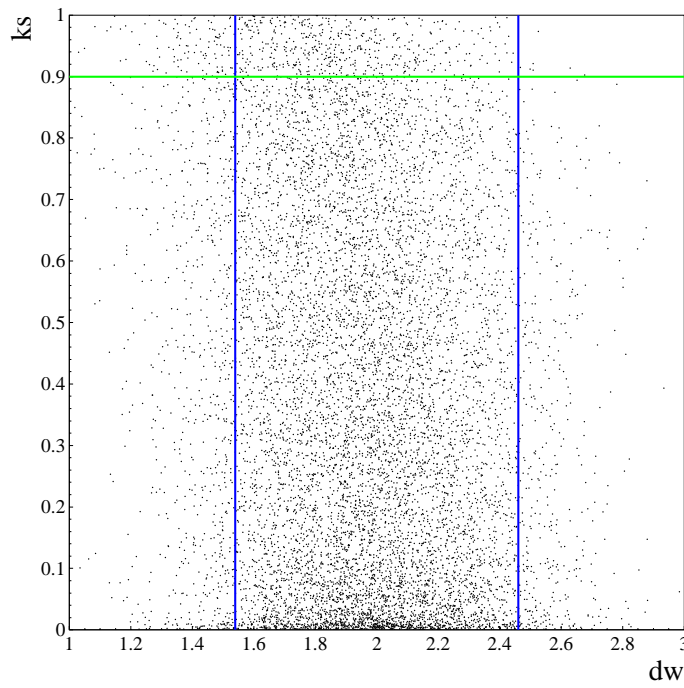


Figura 3.1: Risultato dell'analisi dei residui attraverso i test di Kolmogorov-Smirnov e Durbin-Watson per una distribuzione gaussiana assegnata con $n = 42$. Le righe orizzontali e verticali delimitano le zone dei livelli di confidenza al 10%.

3.6 L'acromaticità

Come illustrato nel capitolo precedente, per (quasi) ogni notte di osservazione abbiamo a disposizione immagini in R e I , entrambe di buona qualità, che ci permettono un'analisi dei possibili effetti *cromatici* sulle due curve di luce. Come caratterizzazione generale, gli eventi di *microlensing* sono distinguibili da altri fenomeni astrofisici variabili nel tempo proprio per la proprietà dell'indipendenza dalla lunghezza d'onda della funzione di amplificazione.

Prima di procedere occorre sottolineare un aspetto del problema. Come è già stato ricordato in precedenza, l'acromaticità caratterizza un evento di *microlensing* indipendentemente dalla forma, in particolare dall'approssimazione fatta per descriverne la funzione di amplificazione. La forma analitica a cui cerchiamo di adattare i dati sperimentali è del resto la curva di Paczyński. Questo significa precludersi la possibilità di analizzare differenti geometrie possibili di eventi di *microlensing* (e.g., eventi dovuti a sorgenti o a lenti doppie, effetti di sorgente finita). Lo studio di acromaticità va quindi letto piuttosto come uno studio della *compatibilità* nei due colori rispetto alla curva di luce interpolante scelta.

In linea teorica potremmo sfruttare i due colori per entrambi i passaggi successivi della *selezione* e dell'*analisi* delle curve di luce. Circa la selezione, teniamo però in considerazione che almeno una vasta classe di stelle intrinsecamente variabili e molto luminose (cui siamo potenzialmente più sensibili) sono relativamente "fredde", e quindi una selezione in I porterebbe proprio al rilevamento dei segnali di cui vogliamo liberarci. Alcune selezioni test effettuate su porzioni del campo nei due colori hanno confermato questa previsione. Inoltre, abbiamo un miglior campionamento sulle immagini acquisite nel filtro R . Per entrambi questi motivi, la selezione dei pixel interessanti è condotta esclusivamente sulle curve di luce R .

Tutta la successiva analisi della forma è svolta, al contrario, tenendo esplicitamente conto dell'acromaticità che deve caratterizzare un evento di *microlensing*. In particolare questa comprende 3 passaggi distinti

- valutazione dei parametri con un fit di Paczyński in entrambi i colori;
- analisi dei residui;
- test di *acromaticità* sulle variazioni del flusso rispetto al *background*;

che discutiamo ora in dettaglio.

Data l'espressione (3.5) che descrive l'evoluzione temporale del flusso in un pixel, il flusso di fondo ϕ_{fondo} e il flusso della sorgente non amplificata ϕ^* dipendono dal colore e sono costanti nel tempo. La variazione temporale, indipendente dal colore, è contenuta nell'espressione dell'amplificazione $A(t)$, che, nell'approssimazione di *Schwarzschild*, è caratterizzata da 3 parametri: la distanza minima di impatto u_0 , l'istante di massima amplificazione t_0 e il parametro di durata legato alla massa della lente nonché alla sua velocità e alle distanze relative osservatore-lente-sorgente, il *tempo di Einstein*, t_E .

Nell'approssimazione di alta amplificazione (3.11) rimangono 2 parametri osservabili *indipendenti* dal colore, t_0 e $t_{1/2} = t_{1/2}(t_E, u_0)$. In questo caso, imponendo come vincolo l'uguaglianza di questi parametri "geometrici", minimizziamo la funzione χ^2 dipendente dai 6 parametri

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{\left[\phi(t_i) - \phi_{modello} \left(t | \phi_{fondo}^R, \phi_{fondo}^I, \Delta\phi_0^R, \Delta\phi_0^I, t_0, t_{1/2} \right) \right]^2}{\sigma^2(\phi(t_i))}, \quad (3.19)$$

dove

$$\begin{aligned} \phi_{modello}(t) = & \left[\phi_{fondo}^R + \frac{\Delta\phi_0^R}{\sqrt{1 + 12 \left(\frac{t-t_0}{t_{1/2}} \right)^2}} \right] \theta(R) + \\ & \left[\phi_{fondo}^I + \frac{\Delta\phi_0^I}{\sqrt{1 + 12 \left(\frac{t-t_0}{t_{1/2}} \right)^2}} \right] \theta(I). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Determinati i parametri, l'analisi successiva consiste nella valutazione della bontà del fit attraverso lo studio dei residui: i test di ipotesi di Kolmogorov-Smirnov e di Durbin-Watson discussi in precedenza. Come test di *compatibilità* tra le curve di luce nei due colori, li effettuiamo entrambi utilizzando i residui calcolati a partire dalle previsioni fatte in base alla stima dei parametri con il fit (3.19). Nel caso del test di Durbin-Watson, essendo questo basato sullo studio della correlazione temporale dei residui successivi, viene valutato un coefficiente per ognuna delle due curve di luce (dw_R e dw_I). Per il test di Kolmogorov-Smirnov possiamo, al contrario, considerare contemporaneamente la distribuzione dei residui delle due curve di luce, potendo avere inoltre in questo modo, con ~ 80 punti, maggiore fiducia nella significatività del test [128].

L'ultimo test di acromaticità, nell'ambito dei limiti già evocati *indipendente* dalla forma analitica dell'amplificazione, si basa sullo studio degli scarti dal fondo dei punti appartenenti al *bump*.

Date le espressioni

$$\phi^{(R)}(t) = \phi_{fondo}^{(R)} + (A(t) - 1) \phi^{*(R)}, \quad (3.21)$$

$$\phi^{(I)}(t) = \phi_{fondo}^{(I)} + (A(t) - 1) \phi^{*(I)}, \quad (3.22)$$

è possibile caratterizzare la relazione tra le due curve di luce in questo senso studiando il rapporto delle differenze tra i punti che appartengono al *bump* e i punti del fondo. Per un evento di *microlensing* l'amplificazione, una proprietà geometrica, è *indipendente* dal colore, e tale rapporto deve rimanere *costante* nel tempo

$$\frac{\delta_R}{\delta_I} \equiv \delta_{RI}(t) = \frac{\phi_{bump}^{(R)} - \phi_{fondo}^{(R)}}{\phi_{bump}^{(I)} - \phi_{fondo}^{(I)}} = \frac{\phi^{*(R)}}{\phi^{*(I)}} = \text{costante}. \quad (3.23)$$

I punti sui quali lo studio della costanza del rapporto (3.21) è significativo sono quelli caratterizzati dall'avere, attorno al tempo di massima amplificazione, uno scarto dal fondo maggiore di 3σ rispetto alla linea di fondo in *entrambi* i colori. Il flusso di fondo è definito come il massimo tra la linea di base, già utilizzata per calcolare la funzione di verosimiglianza, e il valore ottenuto dal fit. Questa analisi viene dunque indebolita dallo spesso limitato numero di punti appartenenti al *bump*.

Essendo la sorgente a riposo non risolta, al variare del rapporto tra il suo flusso, quello del fondo del cielo e l'amplificazione, anche per un evento di *microlensing* non ci aspettiamo che a una variazione significativa in un colore (per come svolta l'analisi, in R), ne corrisponda necessariamente una equivalente nell'altro. Data l'importanza del test di acromaticità, *escludiamo* dall'analisi le curve di luce dove la variazione sia presente in un solo colore.

Dati i due insiemi di valori delle deviazioni rispetto al livello di fondo, cominciamo con valutare il relativo coefficiente di correlazione *lineare* (fissato il numero di punti coinvolto nel calcolo). In caso di correlazione non significativa al livello di confidenza scelto (in seguito, nell'analisi, fissato al 99%), possiamo concludere che l'evento studiato è *cromatico*, ed eliminare quindi la curva di luce come quella di un possibile evento di *microlensing*. In caso contrario non possiamo però concludere affermando l'*acromaticità* dell'evento, poiché quest'analisi non dice se l'eventuale correlazione è tale che il rapporto delle deviazioni sia *costante* nel tempo. Si tratta cioè di un criterio *necessario* ma *non sufficiente* per caratterizzare in questo senso le curve di luce.

Sulle curve di luce così selezionate, procediamo quindi a un'ulteriore analisi. In particolare, studiamo la funzione $\delta_{RI}(t)$ come una funzione del tempo, facendo diverse ipotesi circa la sua dipendenza dalla variabile temporale e valutando quella che meglio si adatta ai dati. In particolare valutiamo i coefficienti costanti a_0, a_1, a_2, b_1, b_2 e c_2 e relativi errori Δ delle seguenti espressioni

- $\delta_{RI}(t) = a_0, \quad \Rightarrow \chi_0^2;$
- $\delta_{RI}(t) = a_1 + b_1 \cdot t, \quad \Rightarrow \chi_1^2;$
- $\delta_{RI}(t) = a_2 + b_2 \cdot t + c_2 \cdot t^2, \quad \Rightarrow \chi_2^2.$

Valutiamo quindi i differenti valori χ_i^2 e verifichiamo se i coefficienti b_1, b_2 e c_2 sono significativamente differenti da zero, cioè se $|b_1| > \Delta b_1, |b_2| > \Delta b_2$ o $|c_2| > \Delta c_2$. In tal caso, escludiamo la curva di luce.

Qualora il numero di punti che descrivono la variazione di luminosità sul *bump* sia sufficientemente elevato, possiamo confrontare, con un test di ipotesi, la bontà dei differenti fit. Il test di Kolmogorov-Smirnov necessita di ~ 80 punti, dunque è da escludere. Il numero minimo di punti per cui sono stati calcolati gli intervalli che delimitano i diversi livelli di confidenza per il test di Durbin-Watson è 15, e in alcuni casi è stato possibile utilizzarlo. In uno particolare questo test si è rivelato determinante.

La valutazione dell'efficienza del test basato sul rapporto (3.23) in relazione alla precisione fotometrica dei dati è stata verificata (e viene discussa nel capitolo successivo), applicandolo a delle curve di luce che, per altri motivi, appaiono manifestamente essere originate da segnali intrinsecamente variabili.

3.7 Le simulazioni

Discutiamo ora due aspetti importanti dell'analisi del segnale. Da una parte vogliamo capire, dato un segnale di *microlensing*, se e in quale modo i criteri di selezione sulla forma del segnale siano efficaci. Questo per quanto riguarda sia l'approssimazione usata per l'interpolazione dei dati, con una curva di Paczyński a 4 o a 5 parametri, sia i successivi test sullo stesso fit (valutazione del χ^2 , test di ipotesi). Valutiamo inoltre la relazione esistente tra i diversi criteri. Questa analisi può essere considerata un'integrazione alla simulazione Monte Carlo, con la quale, date le effettive condizioni fisiche dell'esperimento, prediciamo il numero e il tipo di eventi di *microlensing* che ci aspettiamo di trovare.

3.7.1 Analisi dell'efficienza dei test di selezione

Diversi autori hanno mostrato come il ricorso alla curva a 4 parametri sia, nel caso del *pixel lensing*, quasi una necessità [70, 159]. I motivi sono da un lato l'assenza d'informazione diretta sul flusso della sorgente a riposo, dall'altro i fenomeni di degenerazione già ricordati. Anche la collaborazione AGAPE giunge alla stessa conclusione [100].

Vogliamo studiare il problema a partire dai dati a nostra disposizione costruendo un insieme opportuno di eventi simulati. A tale scopo, fissiamo dei valori ragionevoli per i parametri di un evento di *microlensing* rilevabile dal nostro apparato sperimentale. Data l'esatta distribuzione temporale dei dati (questo ci permette tra l'altro di includere i corretti termini di luminosità di fondo del cielo necessari per una coerente valutazione degli errori), estraiamo, sul modello teorico di una curva di Paczyński, i valori del flusso al tempo t_i . Possiamo inoltre porci nella situazione in cui componiamo differenti immagini nel corso della notte, sempre avendo come riferimento l'effettivo campionamento delle misure. Data la valutazione dell'errore statistico, introduciamo l'opportuno rumore gaussiano. Il valore del flusso è quindi tirato da una distribuzione gaussiana con valore aspettato dato dal flusso calcolato lungo la curva, e dispersione data dall'errore a questo associato. Questo è il dato "simulato".

Circa la scelta dei parametri, estraiamo i valori $\phi_{fondo}, t_0, \phi^*, u_0, t_E$ da una distribuzione *uniforme* in un intervallo "ragionevole" fissato dalle osservazioni e dalle simulazioni, avendo cura che le risultanti

distribuzioni non uniformi per i due parametri rilevanti osservabili, $t_{1/2}$ e $\Delta\phi_0$, siano effettivamente “compatibili” con quelle aspettate.

In particolare, siano i 5 parametri ϕ_{fondo} , t_0 , ϕ^* , u_0 , t_E distribuiti in modo uniforme rispettivamente negli intervalli [2500, 25000] ADU, [1464, 1916] giorni, [0, 500], [0, 0.4] e [0, 40] giorni. Le risultanti distribuzioni per i parametri osservabili, $t_{1/2}$ e R_{max} (la valutazione dell’ampiezza dell’amplificazione $\Delta\phi_0$ espressa in magnitudini³), sono riportate in Fig. 3.2.

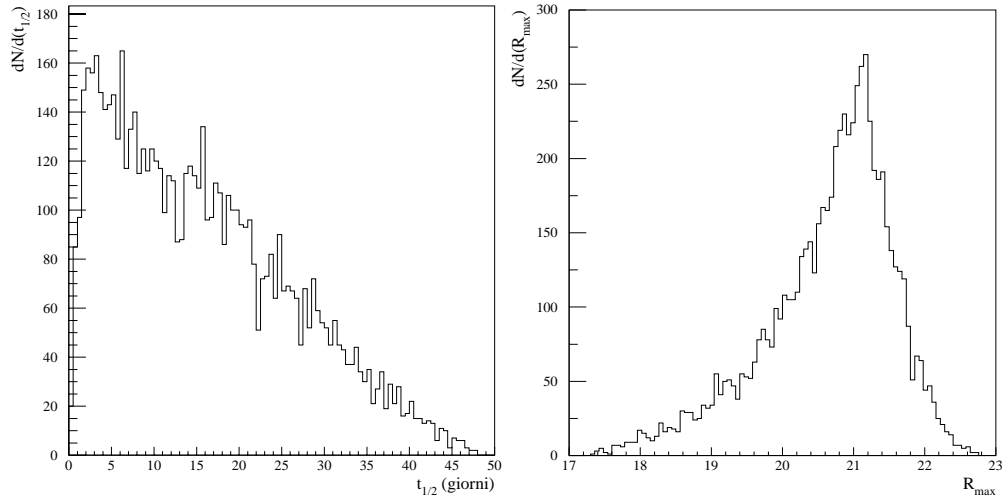


Figura 3.2: Distribuzioni simulate per le grandezze osservabili $t_{1/2}$ e R_{max} date le distribuzioni *uniformi* sui 3 parametri fisici da cui dipendono, ϕ^* , t_E e u_0 .

Osserviamo che in questa simulazione è assente la nozione di “fondo” e del *seeing*. Inoltre i parametri assegnati non rappresentano una reale situazione fisica (eccezione fatta per l’istante di massima amplificazione). Questi dati ci consentono però di valutare il potere predittivo dei fit che poi utilizziamo sui dati reali. L’unico elemento che viene simulato è il rumore gaussiano sulla curva di luce.

L’obiettivo è ora di capire il tipo di risposte che il fit sui dati così simulati con la curva a 4 o a 5 parametri può dare (sia nella determinazione dei parametri, sia nell’analisi successiva). Come primo passo, calcoliamo la funzione di verosimiglianza L , per le due variazioni di luminosità principali (la prima, L_1 , è determinata dall’amplificazione simulata, la seconda, L_2 , eventualmente indotta dal rumore statistico). Questo ci consente di restringere l’attenzione su quelle curve che in una certa misura possiamo considerare che sarebbero “selezionabili” sui dati reali. In particolare, consideriamo solo le curve di luce per cui risulta $L_1 > 100$.

Consideriamo i dati composti in modo tale da avere un solo punto per ogni notte (abbiamo cioè in totale 42 punti, poiché riproduciamo il caso del filtro R). Valutiamo di queste curve la luminosità di fondo, l’istante di massima amplificazione del segnale e i rimanenti 2 parametri osservabili, $t_{1/2}$ e $\Delta\phi_0$, (con il fit a 4 parametri), oppure i 3 parametri fisici t_E , ϕ^* e u_0 con quello a 5 parametri.

Confrontiamo ora le distribuzioni “osservate” dei parametri, nel senso di “dedotte dall’operazione di interpolazione dei dati con il modello analitico”, a 4 o a 5 parametri, con quelle dei parametri teorici introdotti per costruire la simulazione. Per quanto riguarda la determinazione dell’istante di massima amplificazione, t_0 , in entrambi i casi la distribuzione osservata coincide sostanzialmente con quella simulata. In particolare riflette la distribuzione temporale delle misure, per cui vediamo (Fig. 3.3 a sinistra) che la maggior parte degli “eventi” è concentrata nel primo periodo delle osservazioni (ricordiamo che siamo partiti con una distribuzione per t_0 simulata uniforme).

Alle distribuzioni osservate degli altri parametri, al contrario, non è possibile attribuire alcun significato fisico. Ci limitiamo quindi a confrontare i valori stimati dal fit con quelli teorici. Detto p il generico parametro, definiamo $A(p)$ come

$$A(p) \equiv \frac{p_{simulato} - p_{stimato}}{p_{simulato}}. \quad (3.24)$$

³Con riferimento alle equazioni di colore (2.1), valutiamo ora la magnitudine al massimo trascurando il contributo (piccolo) della componente di *colore* in senso proprio.

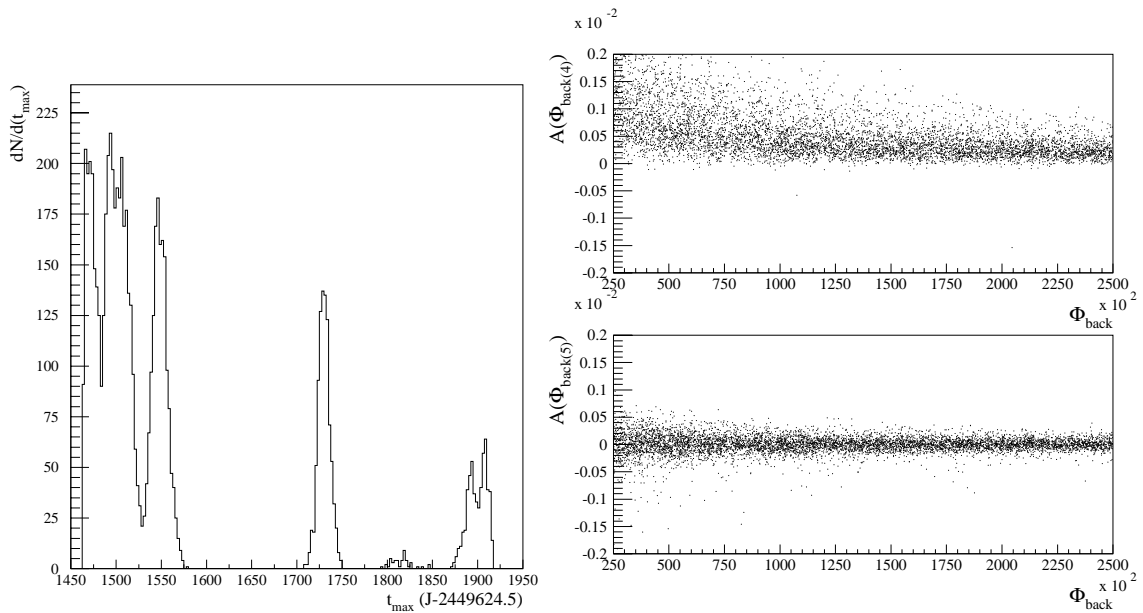


Figura 3.3: Distribuzione dell'istante di massima amplificazione valutato dal fit (in alto). La valutazione del flusso di fondo nel fit a 4 (a sinistra) e a 5 parametri.

La valutazione dei valori di luminosità di fondo del cielo è fatta correttamente da entrambi i fit, per quanto si osservi un leggero effetto sistematico del fit a 4 parametri, che tende a *sottostimare* il valore del fondo (Fig. 3.3 a destra).

I 3 parametri non accessibili alle osservazioni t_E , ϕ^* e u_0 sono rispettivamente valutati dal fit a 5 parametri come mostrato in Fig. 3.4

In tutti e tre i casi il fit è nell'impossibilità di valutare correttamente il valore teorico dei parametri. La dispersione è infatti in tutti i casi significativa.

Passiamo ora a considerare i 2 parametri osservabili. Indichiamo con un (5) quelli dedotti dai parametri stimati dal fit a 5 parametri, con un (4) quelli valutati direttamente dal fit a 4 parametri. La dispersione relativa osservata è in entrambi i casi molto piccola (Fig. 3.5).

Guardando direttamente le distribuzioni $A(t_{1/2(4)})$, $A(t_{1/2(5)})$, $A(R_{\max(4)})$ e $A(t_{\max(5)})$, osserviamo un leggero ma significativo effetto sistematico che sembra privilegiare il fit a 5 parametri. Il fit a 4 parametri tende a *sottostimare* la durata $t_{1/2}$ e l'amplificazione al massimo (Fig. 3.6).

Il confronto evidenzia quindi 3 aspetti fondamentali. L'impossibilità di accedere all'informazione completa dei 3 parametri che descrivono l'amplificazione con il fit a 5 parametri. Il sostanziale accordo nelle previsioni di entrambi i fit sui 4 parametri direttamente osservabili. Un effetto sistematico attribuibile al fit a 4 parametri.

E' possibile svolgere un'ulteriore importante analisi su queste curve di luce, studiando i risultati ottenuti dai diversi test statistici utilizzati nell'analisi delle curve di luce sperimentali (stima del valore del χ^2 e test di ipotesi). Ricordiamo che fissato il livello di confidenza del 10%, il coefficiente di Durbin-Watson dw deve essere contenuto nell'intervallo (1.54, 2.46) per non rigettare l'ipotesi di *non* correlazione, il coefficiente ks relativo al test di ipotesi di Kolmogorov-Smirnov inferiore a 0.90. Questa analisi consente di verificare la pertinenza dei differenti test. Da una parte, data la distribuzione dei valori dei singoli coefficienti, si può valutare l'effettivo margine di errore una volta assegnati gli intervalli di accettazione, dall'altra, più importante, un'analisi comparata tra i risultati ottenuti con i due test di ipotesi permette di analizzare in quale modo questi siano connessi tra di loro. Quello che vogliamo trovare, in questo caso, è una sostanziale *indipendenza* tra i diversi test in modo da giustificarne l'uso contemporaneo nell'analisi.

In Fig. 3.7 osserviamo che sullo stesso insieme di "eventi" il valore del χ^2 ridotto è distribuito correttamente attorno a 1, nel caso del fit a 5 parametri (cioè nonostante singolarmente i singoli parametri *non* siano correttamente stimati), attorno a 1.2 nel caso del fit a 4 parametri.

L'analisi della distribuzione per il coefficiente dw mostra come una frazione maggiore del 10% delle curve di luce rimanga al di fuori dei limiti teorici fissati dal livello di confidenza, e come questo dipenda

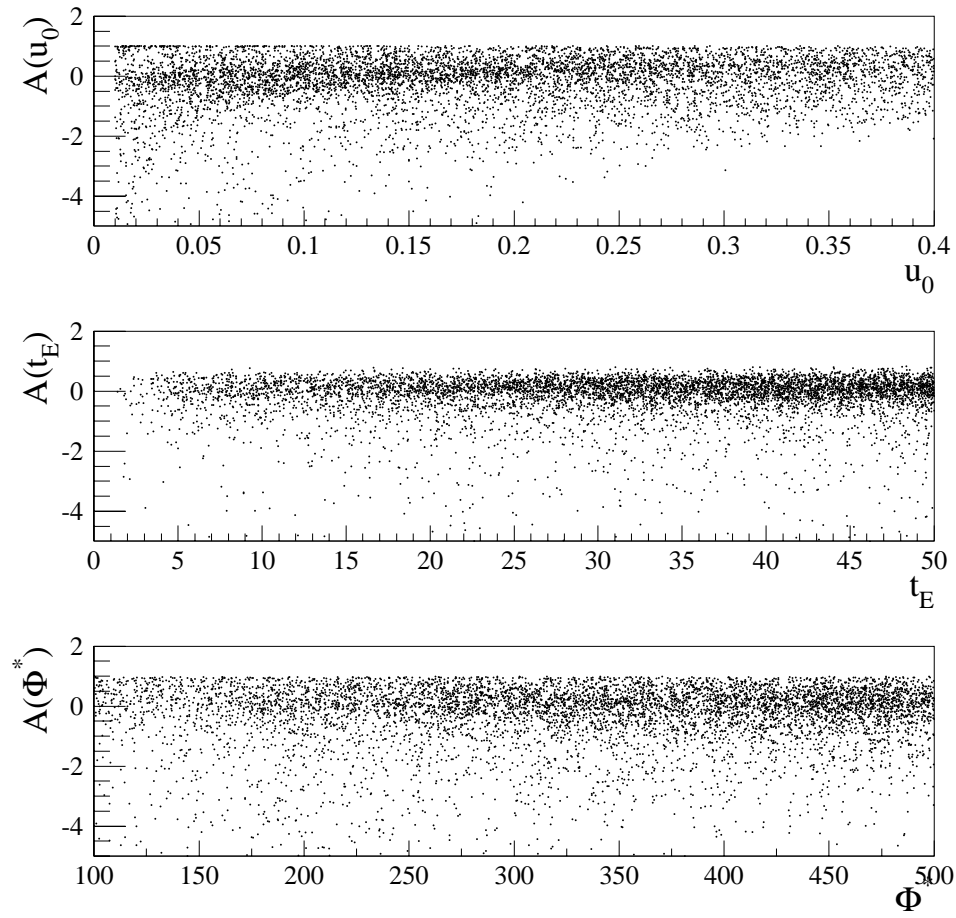


Figura 3.4: La valutazione di u_0 , t_E e Φ^* (rispettivamente dall'alto).

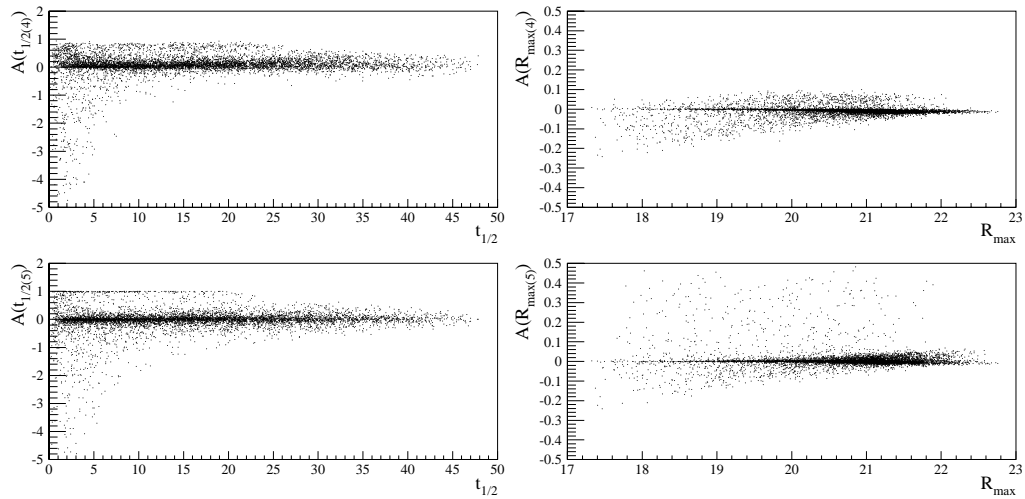


Figura 3.5: La valutazione degli osservabili $t_{1/2}$ (a sinistra) e R_{max} del fit a 4 (in alto) e a 5 parametri.

fortemente dal tipo di fit ($\sim 31\%$ dei punti per il fit a 4 parametri e $\sim 16\%$ per quello a 5 parametri, Fig. 3.8, dove, come nei grafici successivi, tracciamo delle linee in corrispondenza dei valori limite $dw = 1.54$, $dw = 2.46$, $ks = 0.90$, $\chi^2 \equiv \chi^2_{ridotto} = 1.5$). Questo è probabilmente legato, in parte, ai ricordati potenziali problemi legati all'utilizzazione di questo test statistico in un caso in cui la dipendenza dai

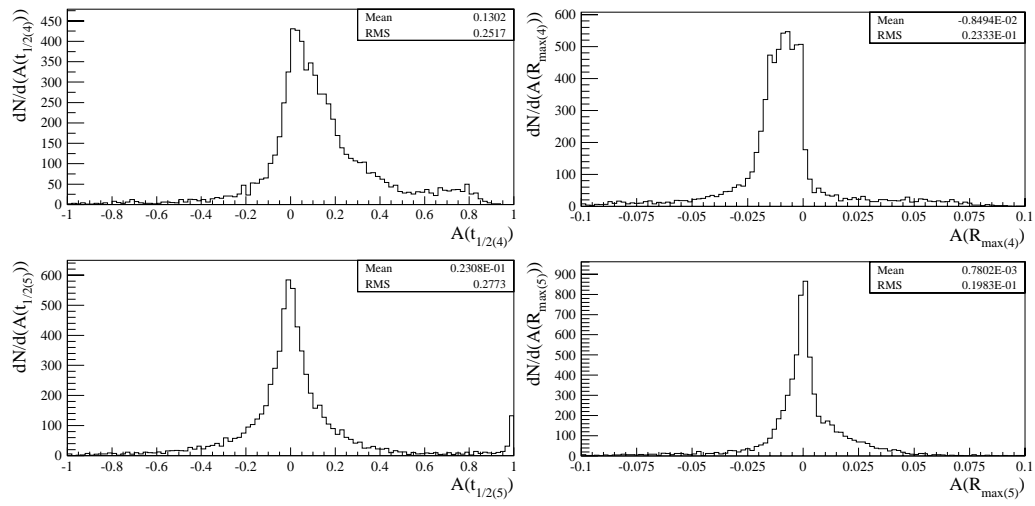


Figura 3.6: Gli istogrammi della proiezione lungo l'asse verticale dei plot in Fig. 3.5.

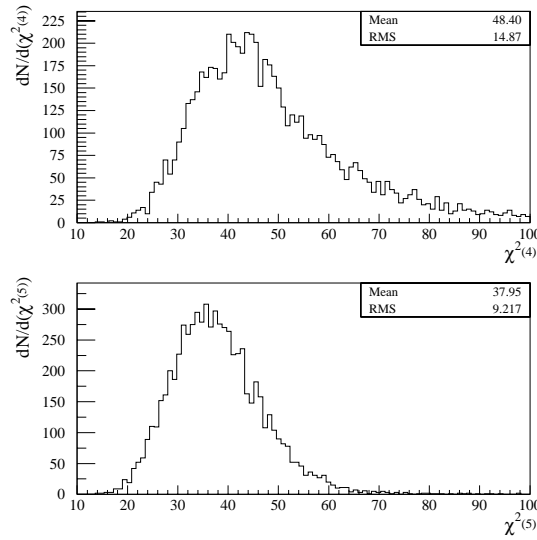


Figura 3.7: Distribuzione del χ^2 per il fit a 4 (in alto) e a 5 parametri.

parametri non è lineare. In particolare, nel caso del fit a 5 parametri osserviamo come una frazione importante delle curve di luce mostri una correlazione *negativa* ($dw > 2.46$).

Le distribuzioni del coefficiente ks per i fit a 4 e 5 parametri mostrano di nuovo una significativa differenza. Le percentuali delle curve “escluse” sono più piccole, $\sim 4\%$ e $\sim 0.7\%$ rispettivamente nei due casi, rispetto a quanto aspettato. Questo test è molto sensibile alla valutazione degli errori (a differenza del test di Durbin-Watson dove svolgono un ruolo marginale), cambiare gli errori equivalendo a confrontare il campione di residui con una distribuzione gaussiana con una dispersione differente. Di conseguenza questo risultato potrebbe essere la spia per un problema in questo senso. Un altro potenziale problema nell'applicazione di questo test è legato al non sufficientemente elevato numero di punti.

Passiamo ora a considerare le relazioni tra i diversi coefficienti. Osserviamo

- la sostanziale indipendenza tra il coefficiente dw e il χ^2 (Fig. 3.9);
- la relazione tra i due test di ipotesi, Durbin-Watson e Kolmogorov-Smirnov, con una distribuzione *uniforme* per il coefficiente dw rispetto al valore $ks = 0.90$ e d'altra parte di ks rispetto ai limiti dell'intervallo di confidenza fissato per dw (Fig. 3.10);
- la dipendenza tra il χ^2 e il coefficiente ks , questa aspettata, essendo entrambi, sia pure in modo

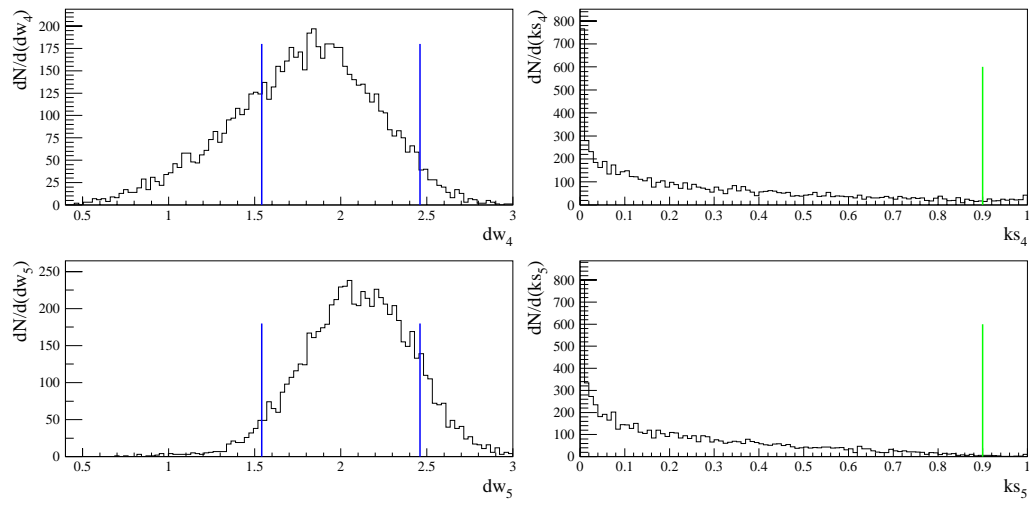


Figura 3.8: Distribuzione dei coefficienti dw (a sinistra) e ks per il fit a 4 (in alto) e a 5 parametri.

differente, sensibili agli scarti tra il valore dato e quello predetto dal fit (Fig. 3.11).

In tutti i casi è visibile la differente “efficienza” del fit a 4 rispetto a quello a 5 parametri.

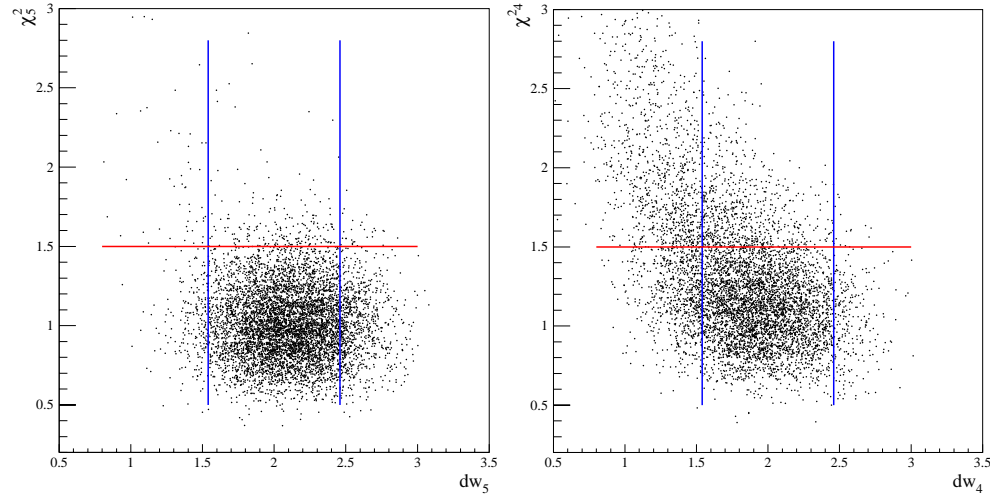


Figura 3.9: Relazione tra il coefficiente del test di correlazione dw e il χ^2 per il fit a 5 (a sinistra) e a 4 parametri.

L’analisi sui test statistici ha messo dunque in evidenza come la curva predetta dal fit a 5 parametri, sia pure con delle grandezze osservabili calcolate non significativamente differenti da quelle valutabili con il fit a 4 parametri, si adatti meglio alle curve di Paczyński simulate qui analizzate.

Circa la difficoltà di determinare i parametri della funzione dell’amplificazione, questa appare essere legata anche al campionamento dei dati. Se infatti ci restringiamo a considerare curve di luce con il massimo localizzato al centro del periodo in cui è distribuita la maggior parte dei dati, e in particolare curve di luce (sempre “selezionate” con $L_1 > 100$) con tempi caratteristici brevi (rispetto al periodo per cui abbiamo una buona copertura temporale, in pratica ci restringiamo al secondo periodo di osservazioni, dove abbiamo 14 notti di osservazione su 20 e possiamo considerare eventi con istante al massimo dell’amplificazione nell’intervallo $t_0 \in [1498, 1500]$ con valori di t_E tipicamente inferiori a 10 giorni per cui risulta $t_{1/2} < 8$ giorni), vediamo come il potere predittivo del fit a 5 parametri anche per i parametri non direttamente osservabili, in particolare per il *tempo di Einstein*, t_E sia significativamente migliore. In particolare, se consideriamo lo scarto relativo $A(t_E)$ nei due casi (la nuova simulazione e quella

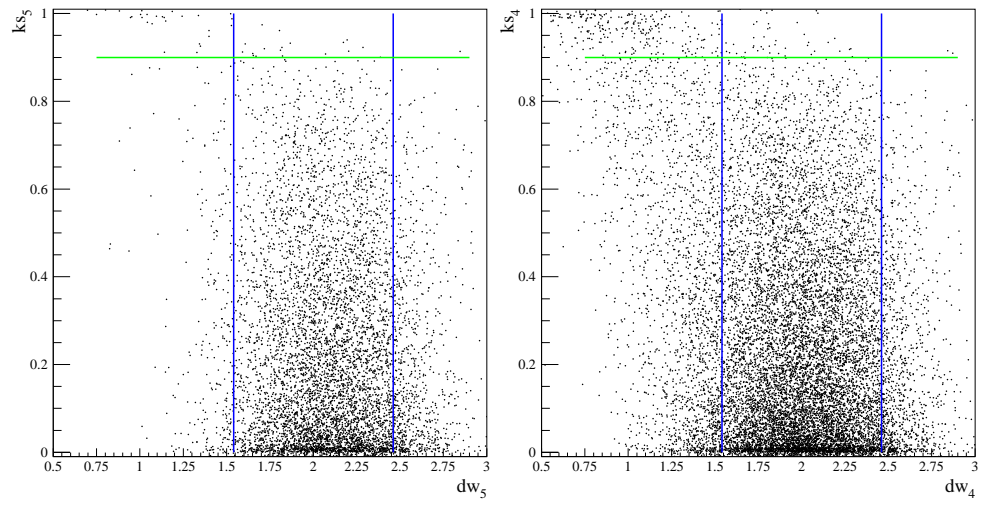


Figura 3.10: Relazione tra i coefficienti dei test di ipotesi dw e ks per il fit a 5 (a sinistra) e a 4 parametri.

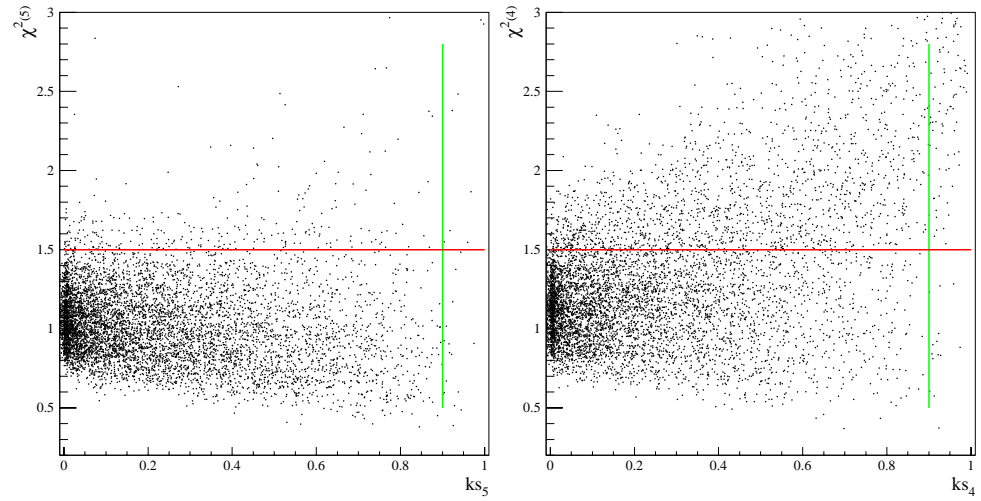


Figura 3.11: Relazione tra il coefficiente del test sulla distribuzione ks e il χ^2 per il fit a 5 (a sinistra) e a 4 parametri.

prima discussa rispettivamente), facendo riferimento alle distribuzioni dove abbiamo escluso le “code” ($|A(t_E)| > 1$, vedi Fig. 3.12), vediamo che rispettivamente una percentuale del 87%, 78%, 64%, 48% e 26% nel primo caso contro una del 83%, 72%, 58%, 41% e 21% dei punti cadono nell’intervallo $|A(t_E)| < \delta$ con $\delta = 0.5, 0.4, 0.3, 0.2$ e 0.1 rispettivamente.

Da un punto di vista della minimizzazione della funzione χ^2 rispetto ai differenti parametri, come già mostrato nell’analisi dei dati di AGAPE [100], il problema è legato alla presenza di “valli” in cui, variando anche di molto i parametri, il valore del χ^2 rimane praticamente costante, o comunque variabile solo molto lentamente. In questo senso nel problema è coinvolta anche l’effettiva efficienza di calcolo numerico del programma di minimizzazione utilizzato⁴.

Come risultato di questa analisi, possiamo concludere che sebbene sia in genere impossibile risalire dai soli dati sperimentali a tutti e 5 i parametri fisici che caratterizzano una curva di luce di Paczyński, rispetto a quello a 4, il fit a 5 parametri sembra dare risultati equivalenti, se non migliori, sulla determinazione dei 4 parametri direttamente osservabili, e godere di una maggiore stabilità riguardo ai test statistici.

Nel seguito svolgiamo l’analisi sistematica sulle curve di luce con il fit a 4 parametri. Su un campione

⁴Tutti i risultati discussi in questo lavoro sono stati ottenuti lavorando con le *routines* di minimizzazione MINUIT delle librerie del CERN.

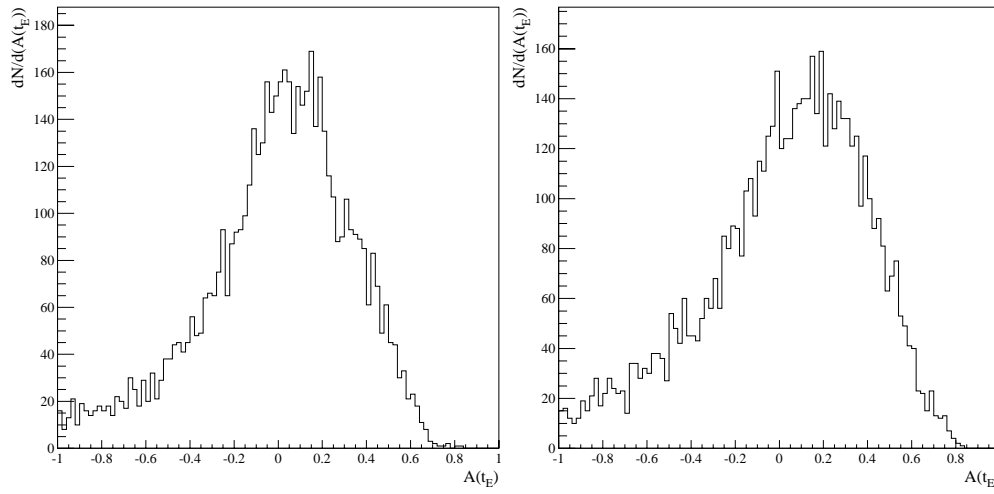


Figura 3.12: Valutazione del *tempo di Einstein* t_E : nuova simulazione per eventi brevi con $t_{1/2} < 8$ centrati nel secondo periodo di osservazioni (a sinistra), e i risultati della simulazione precedente con $t_{1/2} < 50$ giorni con istante al massimo distribuito lungo tutto il periodo delle osservazioni.

di pixel effettuiamo quindi un confronto, alla luce di quanto messo ora in evidenza, con i risultati del fit a 5 parametri.

3.7.2 Simulazioni Monte Carlo

Le simulazioni Monte Carlo⁵ permettono di dare una lettura fisica ai risultati della selezione dei candidati ottenuta. Fissate tutte le condizioni dell'esperimento, le caratteristiche dello strumento, le condizioni di osservazione e la sensibilità di rilevamento, opportunamente descritte tutte le proprietà fisiche conosciute della Galassia e di M31, e fatte alcune ipotesi sulla natura della materia oscura che vogliamo rilevare, il confronto tra le predizioni della simulazione e i risultati sperimentali permette, in linea di principio, di porre alcuni limiti sulla reale situazione fisica che cerchiamo di descrivere e di predire l'ordine di grandezza del numero degli eventi aspettati e le distribuzioni per le grandezze caratteristiche degli eventi.

Presentiamo qui i risultati preliminari di questa analisi. Nel capitolo successivo discutiamo la conclusione che è possibile trarre analizzando i risultati della selezione.

Nel programma di simulazione Monte Carlo da noi usato sono riprodotte da una parte le caratteristiche dell'esperimento, i dati tecnici del telescopio, le condizioni di osservazione e gli algoritmi di selezione, dall'altra quelle fisiche. Riguardo a queste, accanto a quelle specifiche, e note, della Galassia e della galassia di Andromeda, sono stati introdotti anche elementi sui quali si ha minore controllo, e dai quali i risultati possono dipendere anche sensibilmente, come il modello per l'alone. Inoltre, per descrivere un evento di *microlensing* occorre definire per la lente la massa, la velocità e la posizione. Per la sorgente, posizione e luminosità.

E' possibile riassumere il procedimento usato in questi termini. La lente di massa determinata può essere scelta sia nella Galassia che in M31. La sorgente appartiene a M31. Date delle opportune distribuzioni di probabilità si generano posizione e velocità della lente e della sorgente. Si costruisce la curva di luce. Vengono applicati i criteri di selezione.

Il modello dell'alone considerato è quello di una sfera isoterma privo di singolarità (1.11), la differenza tra l'alone della Via Lattea e quello di M31 essendo data da un fattore di scala che fissa le dimensioni e le masse relative. Più in particolare, il raggio di *core* è fissato nelle due situazioni a 5 kpc , mentre si assume che M31 sia due volte più massiva della Via Lattea (riguardo questo ultimo punto ricordiamo che recenti risultati vertono piuttosto nell'indicare che le due galassie abbiano masse uguali [60]). Occorre poi specificare la luminosità della sorgente, che in questa descrizione può appartenere sia al disco che al *bulge* di M31, data una certa *funzione di luminosità*. La simulazione presuppone una massa determinata per la lente che può appartenere all'alone, della Galassia o di M31, o al *bulge* di M31. Rimandiamo a

⁵Utilizziamo il software sviluppato all'interno della collaborazione AGAPE.

[100] per una descrizione dettagliata della simulazione.

Per quanto riguarda più specificatamente le condizioni di osservazione, fissiamo la scansione temporale delle misure e le relative variazioni del fondo del cielo, tenendo conto delle fasi lunari e della posizione relativa nel cielo tra M31 e la Luna (questo è importante per una corretta stima dell'errore relativo). Teniamo inoltre conto delle condizioni del *seeing* attraverso un fattore di perdita del segnale. Sulla base dei dati sperimentali fissiamo la migliore precisione fotometrica. Infine, è fondamentale la verifica, a posteriori, che i valori del flusso per gli oggetti risolti previsti dalle simulazioni siano in accordo con quelli osservati.

Prima di passare all'analisi della simulazione con l'esatta scansione temporale, con la quale riproduciamo le condizioni di osservazioni per le curve di luce con un punto per ogni notte di osservazione, sfruttiamo le simulazioni per apprezzare meglio le possibilità offerte dal fatto di disporre di numerose immagini per ogni notte. Riproduciamo in qualche modo le condizioni dei primi 3 mesi di osservazione, con una notte di osservazione per dieci notti consecutive, ogni 30 giorni per 3 volte. Ogni notte, consideriamo sia un'unica lunga osservazione, sia 4 osservazioni più brevi.

- a : 1 immagine con tempo di esposizione di 120 minuti per notte;
- b : 6 immagini con tempo di esposizione di 20 minuti per notte.

Consideriamo due casi per la massa

- 1 : $m_{bulge}^{MACHO} = 0.6 M_{\odot}$, $m_{alone}^{MACHO} = 0.5 M_{\odot}$;
- 2 : $m_{bulge}^{MACHO} = 0.6 M_{\odot}$, $m_{alone}^{MACHO} = 0.01 M_{\odot}$;

Consideriamo i 2 casi estremi 1a e 2b. Nel primo sono privilegiate curve di luce con un tempo caratteristico lungo (Fig. 3.13). In particolare eventi per cui risulta $t_{1/2} < 5$ giorni (rispettivamente per il 31% e il 71% delle curve di luce): nel primo caso sono tutti caratterizzati da una forte amplificazione (Fig. 3.14). Queste caratteristiche non fanno altro che riflettere la distribuzione dei dati e giustificano i due diversi approcci di strategia di selezione. Lo studio dei dati sperimentali rivela come alcune curve di luce con variazioni di luminosità di breve durata, anche a bassa amplificazione, sono rilevabili solo con questa strategia di selezione.

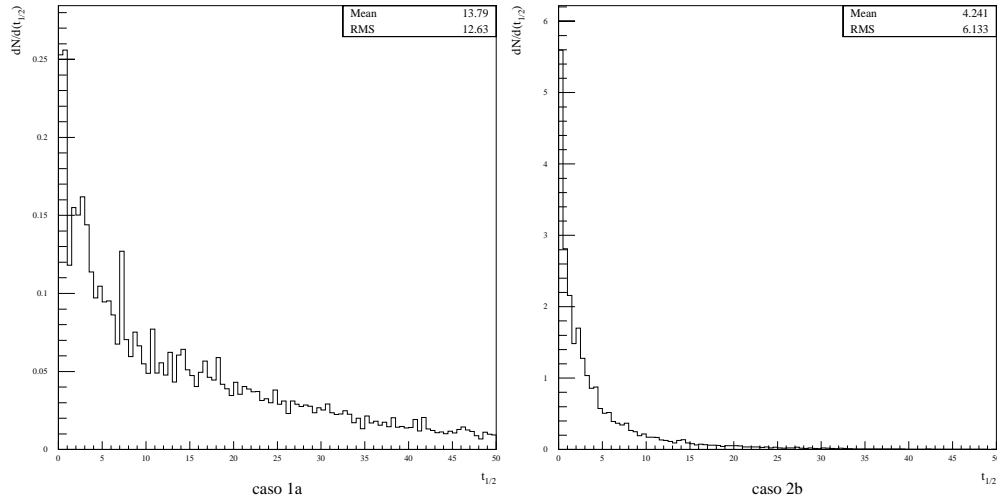


Figura 3.13: Distribuzioni per l'ampiezza temporale osservabile $t_{1/2}$ nei due casi estremi, caso 1a (a sinistra) e 2b, discussi nel testo.

Consideriamo ora una simulazione in cui riproduciamo esattamente il campionamento temporale delle misure. Vengono simulati i dati ottenuti nel filtro R , con 42 punti lungo la curva di luce. Consideriamo diversi casi al variare della scelta delle masse dei MACHOs, in particolare fissiamo m_{bulge}^{MACHO} e variamo m_{alone}^{MACHO} in un intervallo molto ampio

- $m_{bulge}^{MACHO} = 0.4 M_{\odot}$, $m_{alone}^{MACHO} = 0.5 M_{\odot}$;

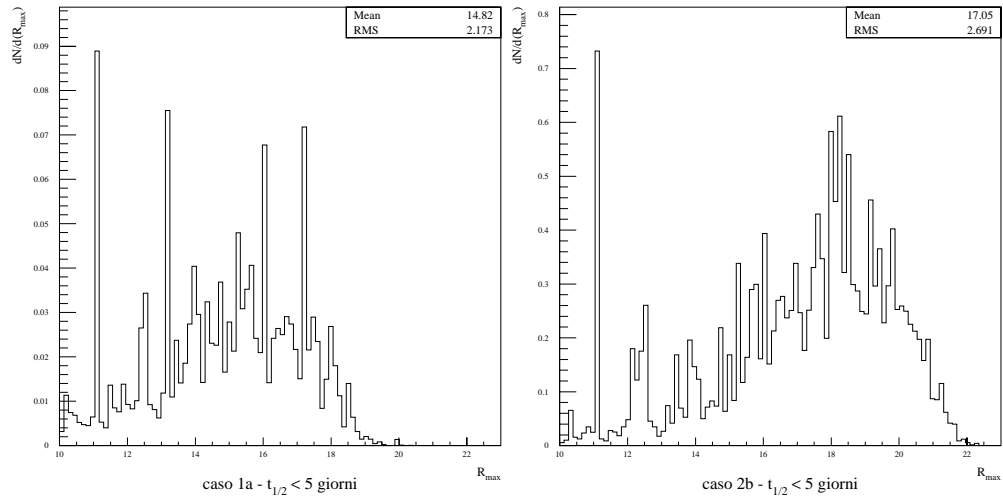


Figura 3.14: Distribuzioni per la magnitudine apparente della stella sorgente al massimo dell'amplificazione, R_{max} , nei due casi estremi 1a (a sinistra) e 2b discussi nel testo, dove si è fatta una selezione in base al criterio $t_{1/2} < 5$ giorni.

lente	sorgente	$m_{alone}^{MACHO} = 0.5 M_{\odot}$	$m_{alone}^{MACHO} = 0.01 M_{\odot}$
alone MW	-	10%	18%
alone M31	-	60%	64%
<i>bulge</i> M31	-	30%	18%
-	disco M31	80%	80%
-	<i>bulge</i> M31	20%	20%
alone MW	disco M31	7%	12%
alone MW	<i>bulge</i> M31	3%	6%
alone M31	disco M31	49%	54%
alone M31	<i>bulge</i> M31	10%	11%
<i>bulge</i> M31	disco M31	24%	14%
<i>bulge</i> M31	<i>bulge</i> M31	7%	3%

Tabella 3.1: Simulazione Monte Carlo: posizione degli eventi

- $m_{bulge}^{MACHO} = 0.4 M_{\odot}$, $m_{alone}^{MACHO} = 0.1 M_{\odot}$;
- $m_{bulge}^{MACHO} = 0.4 M_{\odot}$, $m_{alone}^{MACHO} = 0.01 M_{\odot}$;
- $m_{bulge}^{MACHO} = 0.4 M_{\odot}$, $m_{alone}^{MACHO} = 0.001 M_{\odot}$;

Il numero aspettato di eventi per un alone oscuro composto interamente da MACHOs nei diversi casi è rispettivamente ~ 14 , ~ 20 , ~ 25 e ~ 21 (incluso la frazione di *self-lensing*). Al riguardo dobbiamo osservare che un completo trattamento dell'efficacia di rilevamento non è ancora stato completato, quindi questi numeri vanno letti piuttosto come dei limiti superiori. Osserviamo comunque come il minor numero di eventi aspettato nel caso estremo con $m_{alone}^{MACHO} = 0.001 M_{\odot}$ rispetto ai casi con $m_{alone}^{MACHO} = 0.01 M_{\odot}$ e $m_{alone}^{MACHO} = 0.001 M_{\odot}$ rifletta una minor sensibilità rispetto al rilevamento di eventi di breve durata (ricordiamo che il tempo caratteristico delle variazioni di luminosità è proporzionale alla massa della lente).

E' invece più interessante caratterizzare gli eventi rispetto alla loro posizione. Queste le posizioni relative previste per lenti e sorgenti. Per la maggioranza degli eventi, $\sim 60\%$, la lente è situata nell'alone di M31 mentre solo per una piccola frazione in quello della Galassia o nel *bulge* di M31. Circa $\sim 80\%$ delle sorgenti si trova nel disco di M31. Consideriamo più in dettaglio due casi (Tabella 3.1).

Per un confronto con i dati sperimentali, è significativa l'analisi delle distribuzioni dei parametri osservabili.

La magnitudine massima della sorgente *a riposo* (Fig. 3.15) è $R \sim 26$. Questo appare dipendere dalla massa della lente, il $\sim 23\%$ degli eventi con $m_{alone}^{MACHO} = 0.5 M_{\odot}$ ha $R > 24$, mentre con $m_{alone}^{MACHO} = 10^{-2} M_{\odot}$ questa percentuale scende a $\sim 9\%$ (le percentuali si invertono per $R < 20$). D'altra parte l'amplificazione, con $\sim 43\%$ e $\sim 31\%$ rispettivamente degli eventi con $A_{max} > 10$ è in media maggiore ($\langle A_{max} \rangle = 9.4$ e $\langle A_{max} \rangle = 7.8$) nel primo caso. La magnitudine al massimo scende fino $R_{max} \sim 23$ (questo limite dipende essenzialmente dalla sensibilità dell'apparato di rilevazione), la distribuzione essendo piccata attorno $R_{max} \sim 21$ (e si ritrovano qui le differenze osservate sopra al variare delle masse, ma solo per le amplificazioni deboli). Rispetto alla posizione delle lenti e delle sorgenti, infine, osserviamo che eventi con lenti nel *bulge* sono più amplificati. Per esempio, con $m_{alone}^{MACHO} = 0.5 M_{\odot}$, il $\sim 14\%$ degli eventi ha $R_{max} > 22$, ma se consideriamo il campione con lente nel *bulge* questa percentuale scende al $\sim 4\%$. Con $m_{alone}^{MACHO} = 10^{-2} M_{\odot}$ solo il $\sim 9\%$ degli eventi ha $R_{max} > 22$.

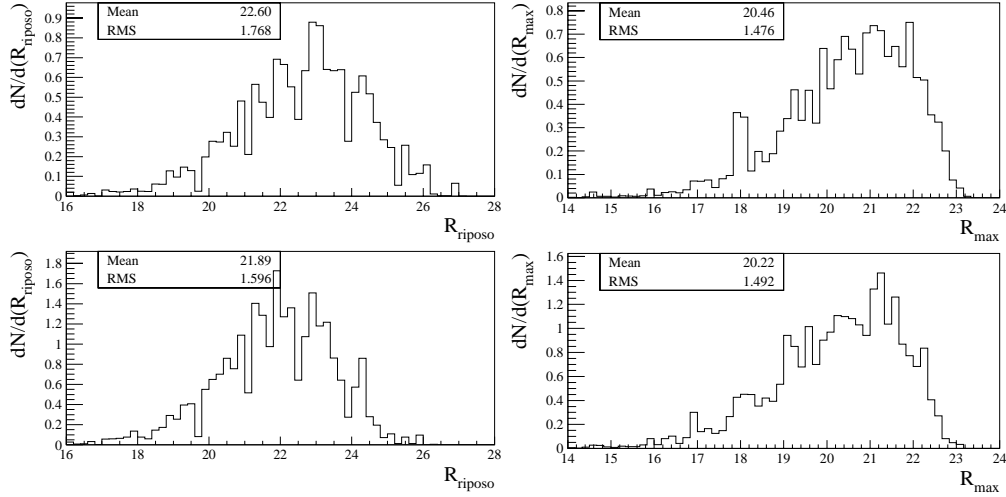


Figura 3.15: Distribuzioni per la magnitudine R apparente della stella sorgente a riposo (a sinistra) e al massimo dell'amplificazione, per $m_{alone}^{MACHO} = 0.5 M_{\odot}$ (in alto) e $m_{alone}^{MACHO} = 10^{-2} M_{\odot}$.

La durata caratteristica degli eventi dipende fortemente dalla massa della lente. Circa $\sim 80\%$ degli eventi è previsto avere $t_{1/2} < 34$ giorni e $t_{1/2} < 12$ giorni nei due casi con lenti di massa maggiore e minore rispettivamente (Fig. 3.16 in alto). Rispetto alla posizione, con $m_{alone}^{MACHO} = 0.5 M_{\odot}$, il $\sim 40\%$ degli eventi con lente nell'alone della Via Lattea, e solo $\sim 10\%$ di quelli con lente nel *bulge*, ha $t_{1/2} > 34$ giorni. Con $m_{alone}^{MACHO} = 10^{-2} M_{\odot}$, $\sim 60\%$ degli eventi con lente nell'alone di M31, contro il $\sim 40\%$ di quelli con lente nel *bulge*, ha $t_{1/2} < 5$ giorni (quando questo caratterizza il $\sim 50\%$ degli eventi in totale).

Come prevedibile, la distribuzione per il *tempo di Einstein* si stringe verso valori più piccoli al decrescere della massa della lente, risultando $\langle t_E \rangle \sim 33, 24, 12$ e 8 giorni rispettivamente per i 4 casi considerati per $m_{alone}^{MACHO} = 0.5 M_{\odot}, 10^{-1} M_{\odot}, 10^{-2} M_{\odot}$ e $10^{-3} M_{\odot}$ (Fig. 3.16 in basso).

Mostriamo infine la curva di luce di alcuni eventi simulati (il livello di fondo è normalizzato a zero, il tempo iniziale fissato in corrispondenza dell'inizio delle osservazioni, Fig. 3.17).

3.8 Conclusioni sulla procedura di analisi

Abbiamo esposto le varie tappe successive che portano prima all'identificazione e poi all'analisi della forma delle curve di luce interessanti. Insistiamo sul fatto che, una volta fissati i criteri di selezione, l'analisi è del tutto automatizzata. Viene escluso ogni intervento soggettivo. Questo da una parte assicura una coerenza di valutazione sull'insieme dei dati, dall'altra si rivela un mezzo efficace (e di fatto l'unico possibile) per trattare grandi quantità di dati come quelle a nostra disposizione. In seguito, con l'ausilio di opportune simulazioni, abbiamo mostrato da una parte l'efficienza dell'analisi statistica sul segnale, dall'altra abbiamo studiato la tipologia degli eventi aspettati.

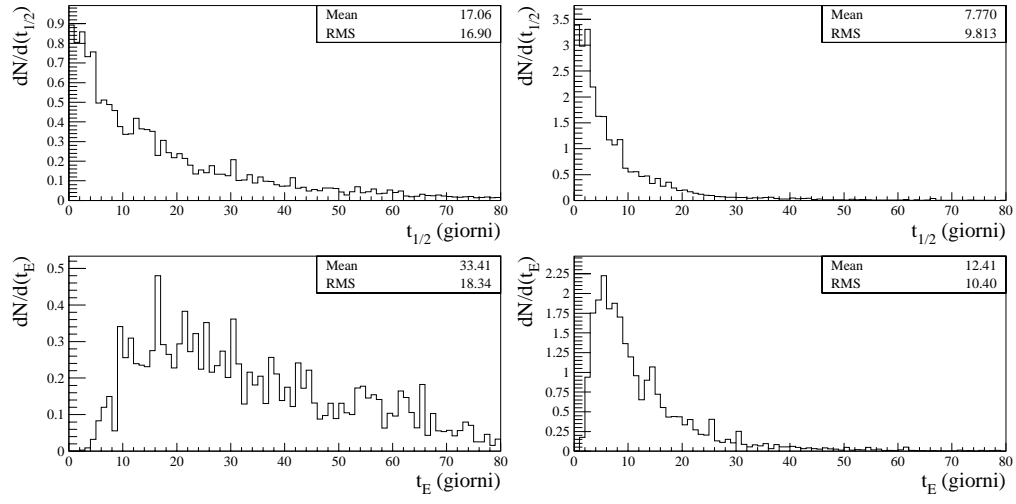


Figura 3.16: Distribuzioni previste per l'ampiezza temporale $t_{1/2}$ (in alto) e t_E nei due casi studiati, $m_{alone}^{MACHO} = 0.5 M_{\odot}$ (a sinistra) e $m_{alone}^{MACHO} = 10^{-2} M_{\odot}$.

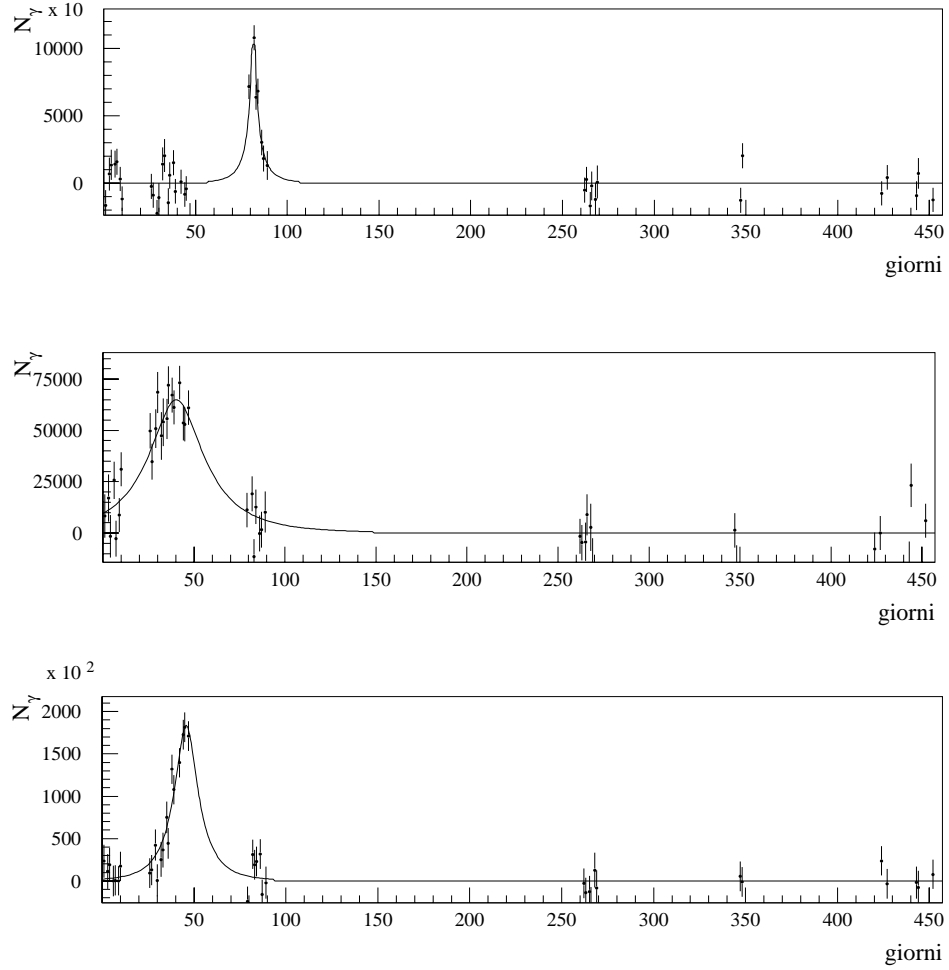


Figura 3.17: Esempi di curve di luce simulate

Capitolo 4

Lo studio delle curve di luce

4.1 Introduzione

In questo capitolo discutiamo i risultati ottenuti nell’analisi delle curve di luce dei dati MDM. In un primo momento analizziamo alcune curve di luce “interessanti”, variazioni di luminosità che si presentano una sola volta ma chiaramente non eventi di *microlensing* e altre curve di luce di sorgenti variabili, e sfruttiamo i dati a disposizione per ottenere informazioni supplementari sui candidati selezionati dalla collaborazione AGAPE sui dati TBL e dai recenti risultati riportati dalla collaborazione POINT-AGAPE. Affrontiamo quindi la selezione e la caratterizzazione dei candidati eventi di *microlensing*. Segue la discussione dei risultati, in particolare il confronto con le previsioni delle simulazioni Monte Carlo e la possibile contaminazione del segnale da parte di sorgenti intrinsecamente variabili. Infine, tracciamo le conclusioni del lavoro.

4.2 Curve di luce di *novæ* e di altre stelle variabili

Nel corso della ricerca di eventi di *microlensing* sono state selezionate e analizzate alcune curve di luce che mostrano una variazione di luminosità significativa che però non soddisfano a uno o più dei criteri di selezione per gli eventi di *microlensing* (non unicità della variazione, forma, cromaticità). Pur non avendo compiuto una ricerca sistematica di questo genere di curve di luce, ne presentiamo alcune che riteniamo essere interessanti. Mostriamo, da una parte, la capacità del *pixel lensing* di rilevamento di variazioni di luminosità diverse da quelle di *microlensing*, dall’altra, rispetto ai dati analizzati, il livello di stabilità raggiunto e l’efficienza dei test per il rilevamento di effetti cromatici.

Le variazioni di luminosità più semplici da rilevare sono quelle caratterizzate da una grande amplificazione, essendo questa una caratteristica propria delle *supernovæ* (poco comuni) e delle *novæ*. Mentre non abbiamo rilevato alcuna curva di luce con caratteristiche proprie di una *supernova*, alcune curve di luce sono attribuibili a delle *novæ*.

Anche in questo caso, purtroppo, il cattivo campionamento temporale delle misure, ci impedisce una valutazione migliore degli eventi. Per una delle curve abbiamo comunque 6 punti attorno al massimo dell’amplificazione, in salita e in discesa, che ci permettono una descrizione sufficientemente accurata, per altre 3 solamente punti lungo la fase decrescente della luminosità. Essendo la sorgente al massimo risolta possiamo valutare con precisione la magnitudine e il colore dell’evento. Sono queste caratteristiche che ci permettono, in primo luogo, il riconoscimento di queste curve come quelle caratteristiche di una *nova*. Queste variazioni di luminosità mostrano dei chiari segni di *cromaticità*. Per quanto sia possibile valutare, la loro forma non è quella caratteristica di una curva di Paczyński. La forma caratteristica di una *nova* è piuttosto *asimmetrica* rispetto al momento di massima amplificazione, e presenta, ricordiamo, una salita rapida (\sim giorni) seguita da una discesa più lenta (\sim mesi). Il tempo caratteristico del fenomeno è di ~ 100 giorni, e nel nostro caso è visibile solo il periodo in cui la sorgente amplificata emerge dal fondo¹.

Come modello analitico per la PSF da cui risaliamo alla valutazione del flusso assumiamo una funzione gaussiana in due dimensioni (sovrapposta a un piano che mima il fondo). Tutte queste curve di luce sono

¹Specialmente per le curve di luce in cui abbiamo punti solo sulla discesa non siamo del resto in grado di escludere altri tipi di variabilità, ad esempio variabili *eruttive*. Anche in questo caso una più lunga base temporale e un miglior campionamento sarebbero necessari per una migliore caratterizzazione degli eventi osservati.

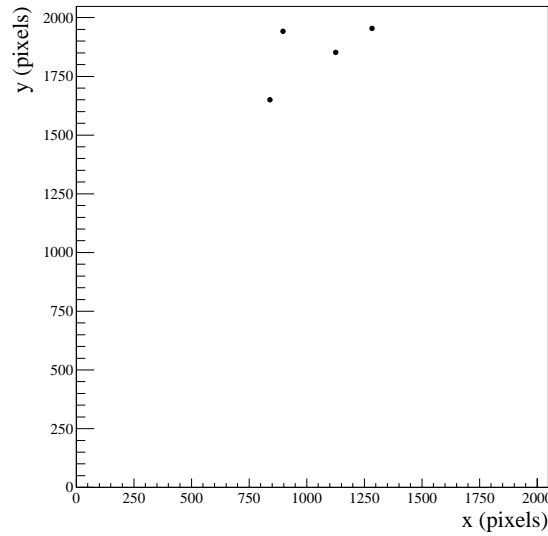
id	RA,DEC(J2000)	R_{max}	$R - I$
$n1$	00h43m1s.8, 41°15'38".5	17.0	0.2
$n2$	00h42m50s.0, 41°16'48".7	< 17.2	0.2
$n3$	00h42m46s.7, 41°14'50".3	< 17.8	0.3
$n4$	00h42m38s.6, 41°14'21".1	< 17.3	0.3

Tabella 4.1: Curve di luce di *novæ*

id	n	ρ	a_0	$\sigma(a_0)$	χ_0^2	a_1	$\sigma(a_1)$	b_1	$\sigma(b_1)$	χ_1^2
$n1$	6	1.00	1.63	0.02	0.95	1.61	0.02	0.010	0.007	0.66
$n2$	6	0.94	1.50	0.01	71	1.66	0.01	-0.039	0.002	7.0
$n3$	27	0.99	1.34	0.01	13	1.43	0.01	-0.0071	0.0001	3.4
$n4$	22	1.00	1.50	0.01	23	1.41	0.01	0.056	0.003	2.5

Tabella 4.2: *Novæ*: analisi della cromaticità

state individuate nella zona centrale della galassia, nella vicinanza del *bulge* (Fig. 4.1), come previsto poiché è appunto questa la zona più popolata di stelle di fondo [35].

Figura 4.1: La posizione delle 4 *novæ* selezionate sul campo Target

Con l'eccezione del primo caso, quella della magnitudine al massimo è solo una stima del limite superiore. I valori assoluti trovati sono quelli tipici per le *novæ* di M31, l'indice di colore $R - I$ è anche caratteristico di questo genere di fenomeni (Tabella 4.1).

Le curve di luce (Fig. 4.2²) ottenute sono sufficientemente stabili, anche se, per eventi del genere, con sorgente risolta nel momento in cui emerge dal fondo, sarebbe più appropriato uno studio basato sulla valutazione, per ogni punto, del valore del flusso (in un quadrato sufficientemente grande per controllare le variazioni indotte dalle condizioni del *seeing*).

Nell'analisi della cromaticità delle deviazioni dal livello di base in R e in I si rileva sempre una forte correlazione lineare ($\rho \simeq 1$, significativa al 99% *C.L.*) e una dipendenza funzionale del loro rapporto fortemente *dipendente* dal tempo (confronto tra interpolazione con una costante, $\delta_{RI} = a_0$ e con una funzione variabile nel tempo $\delta_{RI} = a_1 + b_1 \cdot t$, Tabella 4.2, con $\chi_1^2 \ll \chi_0^2$ dove $\chi^2 \equiv \chi^2/ndf$ e $b_1 \neq 0$).

Benché non sia stata fatta una ricerca sistematica, sono state rilevate diverse stelle variabili. L'interesse, nel contesto di questa analisi, è la possibilità di verificare l'efficienza dei test di cromaticità poi utilizzati nelle operazioni di selezione degli eventi di *microlensing*, dove in questo caso l'intrinseca variabilità dell'oggetto è assicurata, oltre che dalla verificata cromaticità, dalla forma (non compatibilità con un

²Ora come nel seguito, la numerazione segue quella della relativa tabella, dall'alto in basso, da destra a sinistra. Mostriamo per ogni evento, la curva nei due colori, R e I sovrapposti nell'ordine.

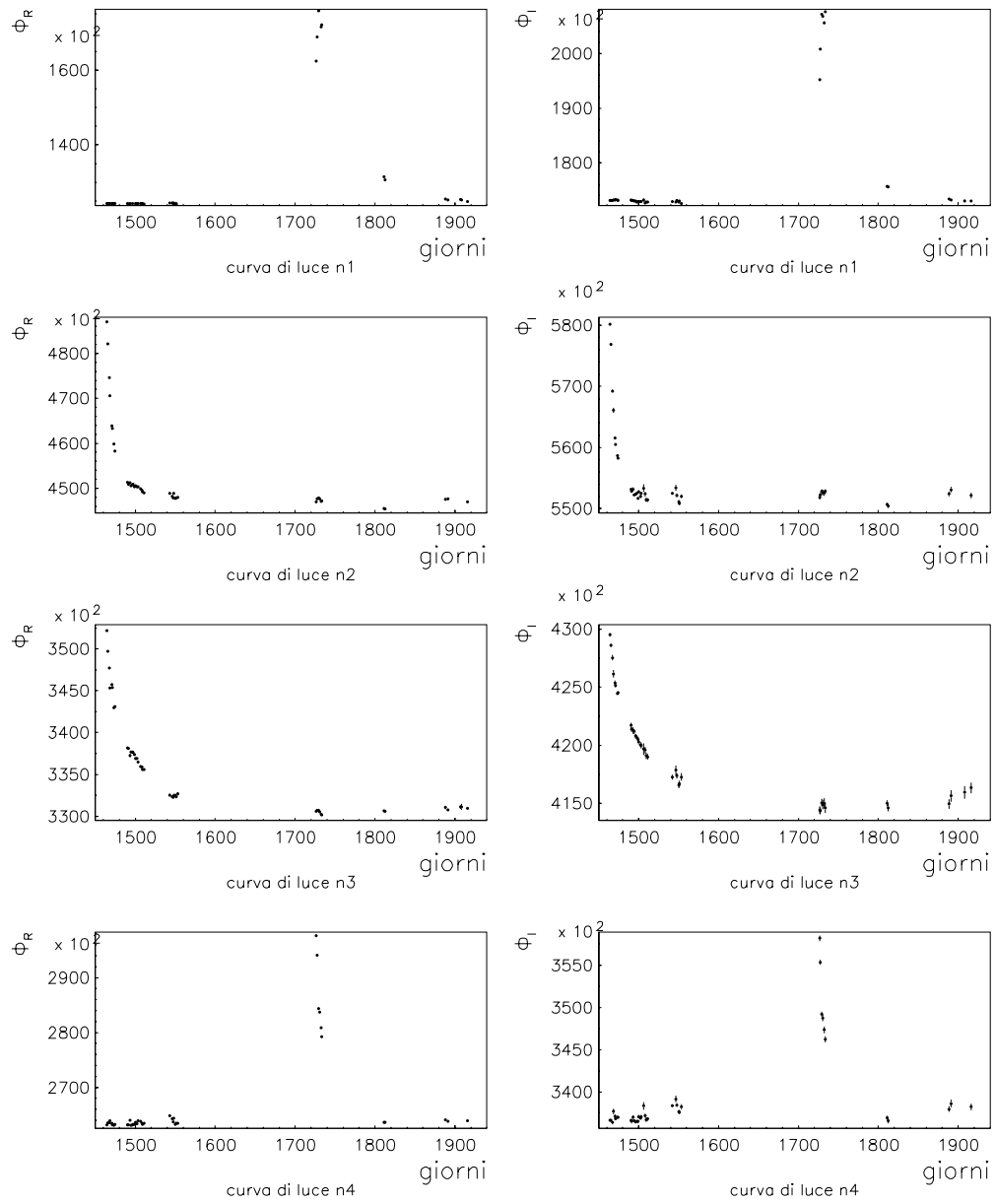


Figura 4.2: 4 curve di luce attribuibili a delle *novæ*. In ascissa, il tempo espresso in giorni (J-2449624.5), in ordinate il flusso espresso in ADU.

fit di Paczyński) e dalla non unicità del fenomeno. L'amplificazione, e il rapporto segnale su rumore, è del resto in questo caso, a differenza delle curve di luce dell' *novæ*, confrontabile con quella che poi troviamo sulle curve di luce selezionate come possibili eventi di *microlensing*. Di conseguenza la verifica dell'affidabilità dei test di cromaticità risulta in questo caso ancora più pertinente.

Il rapporto δ_R/δ_I , in tutti questi casi, risulta funzione del tempo e significativamente differente da quello previsto per eventi di *microlensing* per i quali deve rimanere costante. E' possibile verificarlo sia attraverso lo studio della correlazione lineare (che in un caso risulta negativa), ovvero attraverso la valutazione delle diverse interpolazioni per questo rapporto, con una costante ($\delta_{RI} = a_0$) o con una funzione lineare nel tempo $\delta_{RI} = a_1 + b_1 t$. Effettuiamo cioè di nuovo l'analisi svolta per le curve di luce delle *novæ*. Nei casi in cui ci sono 2 distinte variazioni di luminosità, consideriamo i punti lungo quella definita da un numero maggiore di punti significativamente sopra il livello di fondo.

In due casi un'interpolazione con un polinomio del secondo ordine nella variabile tempo si rivela significativamente migliore (Tabelle 4.4 con $\delta_{RI} = c_2 \cdot t^2 + b_2 \cdot t + a_2$).

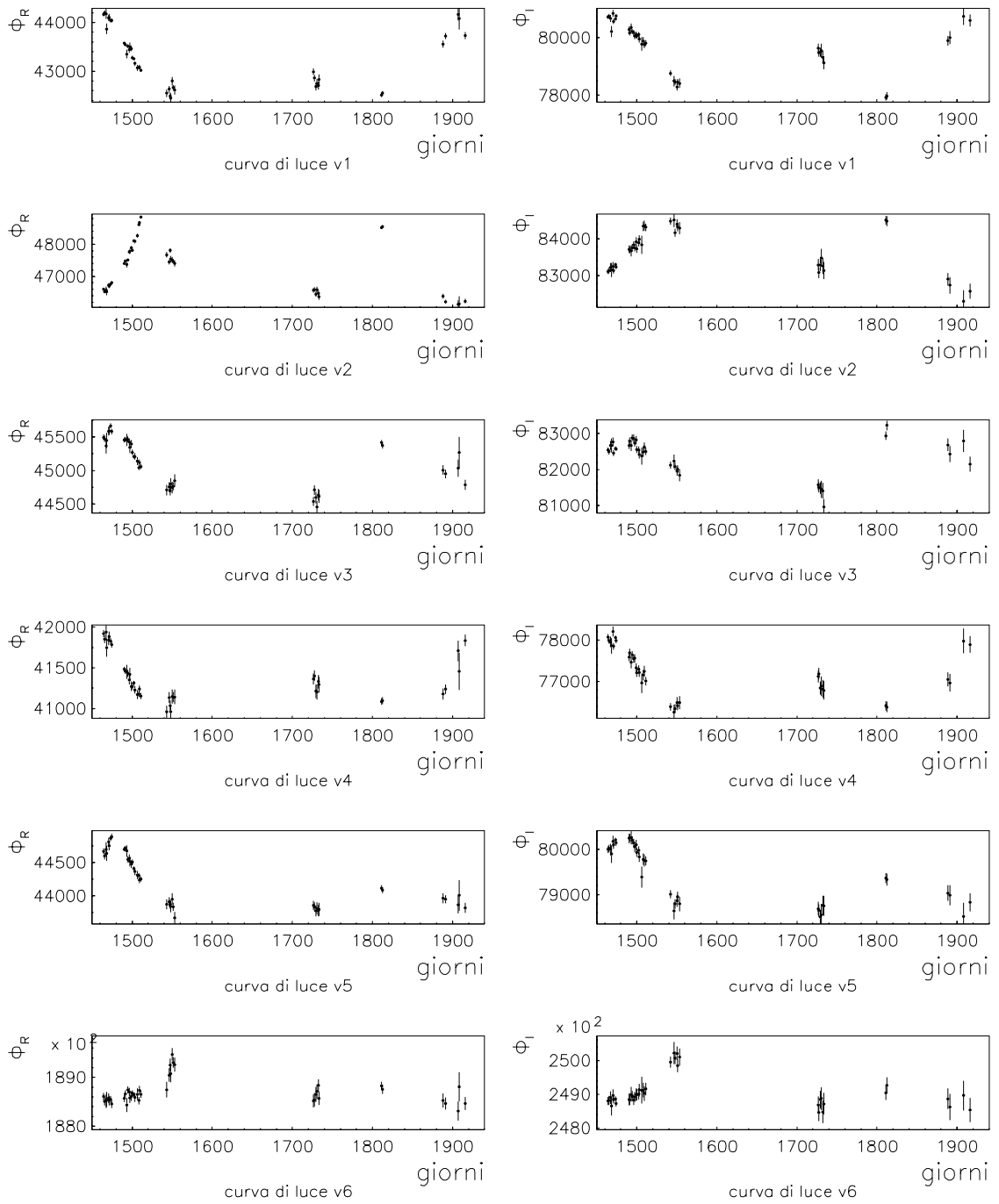


Figura 4.3: 6 curve di luce di stelle variabili selezionate nel campo Target. In ascissa, il tempo espresso in giorni (J-2449624.5), in ordinate il flusso espresso in ADU.

Di nuovo questo test di cromaticità permette di verificare, data la qualità dei dati a disposizione, e pur essendo gli effetti meno evidenti rispetto al caso precedente, la cromaticità degli eventi studiati.

Mostriamo infine la curva di luce di una sorgente *rapidamente* variabile, durante tutto l'arco delle osservazioni (Fig. 4.4 a sinistra), e uno zoom sul primo periodo (Fig. 4.4 a destra). La curva di luce è ottenuta a partire dalle immagini *non* composte. E' interessante osservare come la stabilità fotometrica raggiunta anche su queste curve di luce permetta, in linea di principio, di caratterizzare eventi rapidamente variabili.

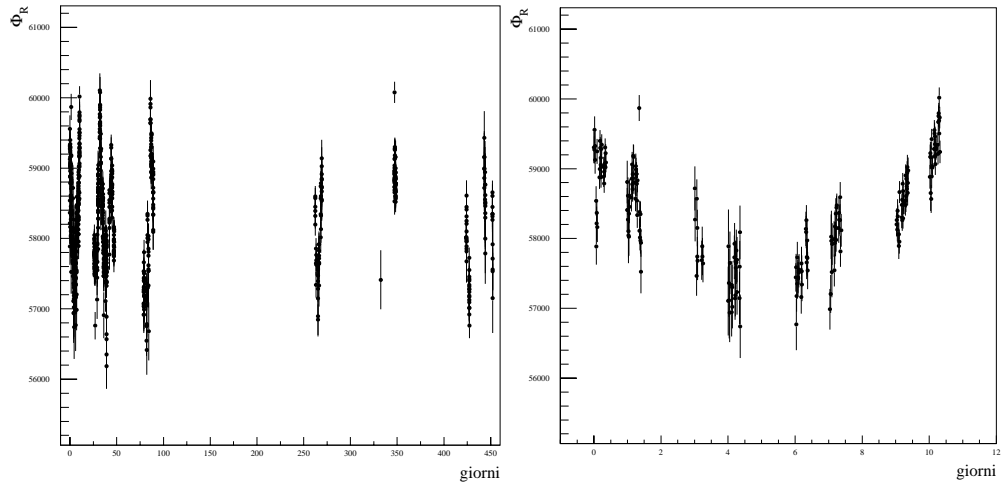


Figura 4.4: La stessa curva di luce, ottenuta con le immagini *non* composte, caratteristica di una sorgente rapidamente variabile, completa (a sinistra), e uno zoom sul primo periodo di osservazioni.

id	n	ρ	a_0	$\sigma(a_0)$	χ_0^2	a_1	$\sigma(a_1)$	b_1	$\sigma(b_1)$	χ_1^2
$v1$	22	0.94	0.66	0.01	7.7	0.84	0.02	-0.0090	0.0008	0.96
$v2$	19	0.26	0.91	0.04	9.1	1.78	0.08	-0.020	0.002	1.72
$v3$	22	0.38	0.99	0.05	2.4	1.7	0.1	-0.025	0.004	0.86
$v4$	22	0.95	0.48	0.01	3.5	0.61	0.02	-0.008	0.001	0.50
$v5$	22	0.76	0.62	0.01	3.1	0.76	0.02	-0.0063	0.0009	0.74
$v6$	5	-0.11	0.51	0.06	1.2	0.4	0.1	0.04	0.02	0.73

Tabella 4.3: Sorgenti variabili: analisi della cromaticità

id	c_2	$\sigma(c_2)$	b_2	$\sigma(b_2)$	a_2	$\sigma(a_2)$	χ_2^2
$v1$	$-0.13 \cdot 10^{-3}$	$0.7 \cdot 10^{-4}$	$-0.31 \cdot 10^{-2}$	$0.32 \cdot 10^{-2}$	0.81	0.03	0.82
$v5$	$-0.11 \cdot 10^{-3}$	$0.8 \cdot 10^{-4}$	$-0.15 \cdot 10^{-2}$	$0.35 \cdot 10^{-2}$	0.74	0.03	0.67

Tabella 4.4: Sorgenti variabili: analisi della cromaticità (2)

4.3 Prolungamento dei candidati AGAPE e POINT-AGAPE sui dati MDM

I dati MDM permettono l'analisi della stabilità di curve di luce il cui profilo è compatibile con quello di un evento di *microlensing* selezionate da altre collaborazioni nella stessa regione di M31. Questa analisi è importante per verificare la richiesta *unicità* degli effetti di *microlensing*. In particolare facciamo riferimento ai risultati ottenuti dalle collaborazioni AGAPE e POINT-AGAPE.

4.3.1 I candidati della collaborazione AGAPE

La collaborazione AGAPE ha selezionato candidati eventi di *microlensing* su 6 campi intorno al *bulge* di M31. Il campo Target ne ricopre 3, i campi denominati A,D e F, dove si trovano 8 dei 16 eventi selezionati. La possibilità offerta dai dati MDM è quella di verificare la stabilità di queste curve di luce, dove la ripetizione di una variazione di luminosità rivelerebbe il carattere intrinsecamente variabile della sorgente all'origine dell'amplificazione, essendo questo un criterio sufficiente di esclusione per la stessa curva di luce.

L'analisi del prolungamento della curva di luce degli 8 candidati che si trovano sui campi A,D e F di AGAPE sul campo Target di MDM, rivela, in 7 casi, la presenza di una nuova variazione di luminosità significativa [100]. In un solo caso, cioè, questa ulteriore analisi conferma l'ipotesi che si tratti di un evento di *microlensing*, questo rispetto alla loro caratterizzazione di eventi *unici*. Consideriamo in dettaglio due

esempi di cui mostriamo le curve di luce sui dati TBL in Fig. 4.5³

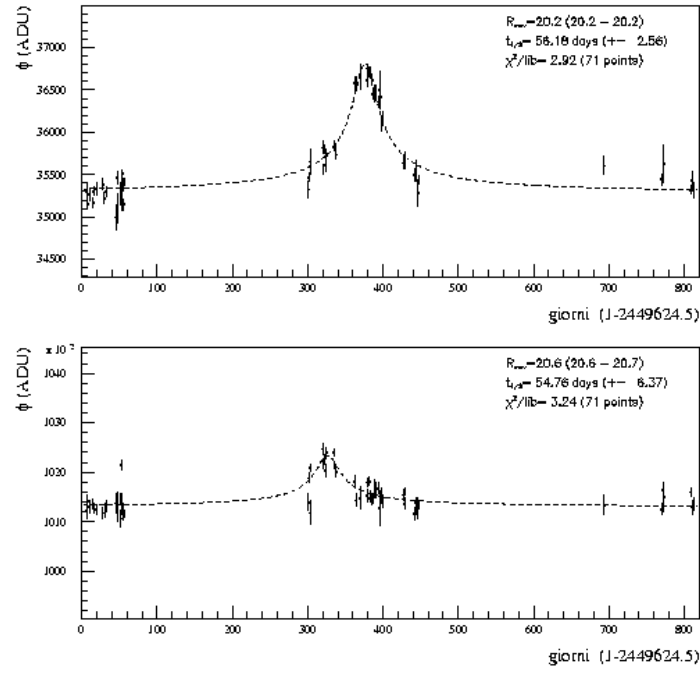


Figura 4.5: 2 curve di luce compatibili con un evento di *microlensing* nei dati TBL di AGAPE. Eventi campo A 585,535 (in alto) e campo A 791,189 [100]. In alto a destra le caratteristiche dell’evento valutate con un fit di Paczyński a 4 parametri.

Per confrontare gli ordini di grandezza delle variazioni coinvolte ricordiamo l’equazione del colore dei dati TBL, dove è stato usato un filtro Gunn-r, da confrontare con le equazioni di colore per i dati MDM (2.1)

$$R_{Johnson}^{tbl} = 20.5 - 2.5 \log \left(\frac{\Phi_{ADU}^R}{T_{tbl}} \right), \quad (4.1)$$

dove dove $T_{tbl} = 1200$ è il tempo di esposizione per l’immagine espresso in secondi.

Il prolungamento della curva di luce TBL A585,535 sui dati MDM mostra degli evidenti segni di variabilità. Possiamo comunque osservare che il tempo caratteristico di variazione sui dati MDM sembra essere più lungo di quello rilevato sui dati TBL, e come la stima della magnitudine della variazione, $R \sim 21$, sia solo marginalmente compatibile con il valore calcolato sui dati TBL. Vediamo del resto che la variabilità è più accentuata sulla curva di luce del filtro I . Inoltre, l’analisi delle immagini al massimo e al minimo dell’amplificazione rileva l’inequivocabile presenza di un oggetto che emerge dal fondo. Questo candidato di AGAPE viene quindi rigettato in seguito all’analisi sui dati MDM.

La curva di luce MDM prolungamento di TBL A791,189 non mostra, al contrario, variazioni sufficienti a suggerire che si tratti di un evento autenticamente variabile. In realtà, la non ottima copertura temporale del periodo di osservazioni impedisce di verificare la reale significatività delle piccole variazioni osservate, che rimangono del resto nei limiti del rumore statistico.

Il candidato evento di *microlensing* sui dati TBL oggetto di uno studio particolare è, come già discusso, quello detto AGAPEZ1. Mostriamo ora la curva di luce completa lungo tutto il periodo di osservazione dei dati TBL.

AGAPEZ1 è localizzato nelle immediate vicinanze del *bulge* di M31, all’interno del campo detto “Control” dei dati MDM, dove ancora manca un’analisi sistematica dei dati. Al fine di studiarne il prolungamento sui dati MDM, abbiamo comunque svolto tutte le operazioni di riduzione e di pre-analisi sulle immagini (questo limitatamente al periodo ottobre 1998-giugno 1999). In questo caso la curva di luce sui dati MDM rimane *stabile*, confermando l’ipotesi che si tratti di un evento di *microlensing*.

³Il tempo 0 delle osservazioni è lo stesso di quello utilizzato nelle curve di luce MDM.

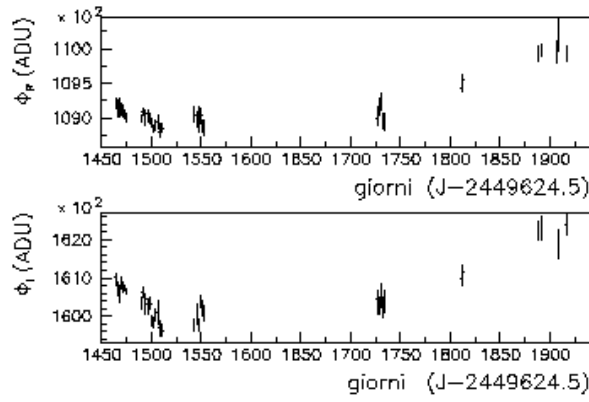


Figura 4.6: Il candidato TBL campo A 585,535 prolungato sui dati MDM.

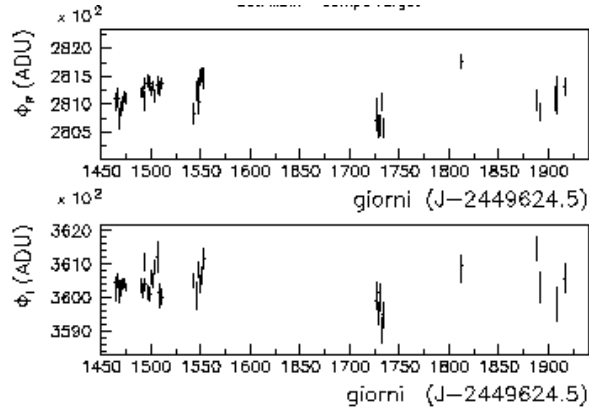


Figura 4.7: Il candidato TBL campo A 791,189 prolungato sui dati MDM.

Questa analisi, a parte la sua intrinseca utilità, mette di nuovo in evidenza l'importanza di disporre di un'adeguata base temporale di misure per poter caratterizzare nel modo opportuno le variazioni di luminosità rispetto alla prevista *unicità* dei fenomeni di *microlensing*.

4.3.2 Un candidato della collaborazione POINT-AGAPE

La collaborazione POINT-AGAPE utilizza la *Wide Field Camera* (WFC) montata sul *Isacc Newton Telescope* (INT) allo scopo di monitorare due campi in direzione di M31 di $\sim 0.3^\circ \times 0.3^\circ$ ognuno, posti rispettivamente a Sud e a Nord, per rilevare variazioni di luminosità dovute a effetti di *microlensing* [91].

Recentemente [13] è stata riportata notizia di un candidato *microlensing* di breve durata ($t_{1/2} = 1.8$ giorni), che è stato denominato PA-99-N1, localizzato in $RA = 00^h 42^m 51^s.42$, $DEC = +41^\circ 23' 53''.7$ (J2000, Fig. 4.10 a sinistra). La stella sorgente dell'amplificazione è stata poi identificata su delle immagini di archivio HST. Questo ha permesso un'ulteriore caratterizzazione dei parametri caratteristici dell'evento. In particolare, basandosi su questa informazione e su un fit di Paczyński a 7 parametri (analogo a quello da noi descritto, i dati sono acquisiti nei filtri Sloan r' e g'), vengono dedotti il *tempo di Einstein*, $t_E = 10.4 \pm 1.5$ giorni, e il parametro d'impatto, $u_0 = 0.056 \pm 0.009$ (cui corrisponde un'amplificazione $A_{max} \sim 18$). La massa stimata della lente è rispettivamente di $0.06 M_\odot$ e $0.02 M_\odot$ per un MACHO appartenente a M31 o alla Via Lattea, di $0.2 M_\odot$ per una lente stellare in M31.

In seguito a un'opportuna calibrazione geometrica tra le relative immagini di riferimento, abbiamo individuato la posizione del candidato PA-99-N1 all'interno del campo Control dei dati MDM (Fig. 4.9 a destra).

Siamo quindi in grado di riportare la curva di luce costruita a partire dai dati MDM corrispondente all'evento PA-99-N1 (Fig. 4.10, dove purtroppo nessun dato è disponibile al momento del *bump*). Uti-

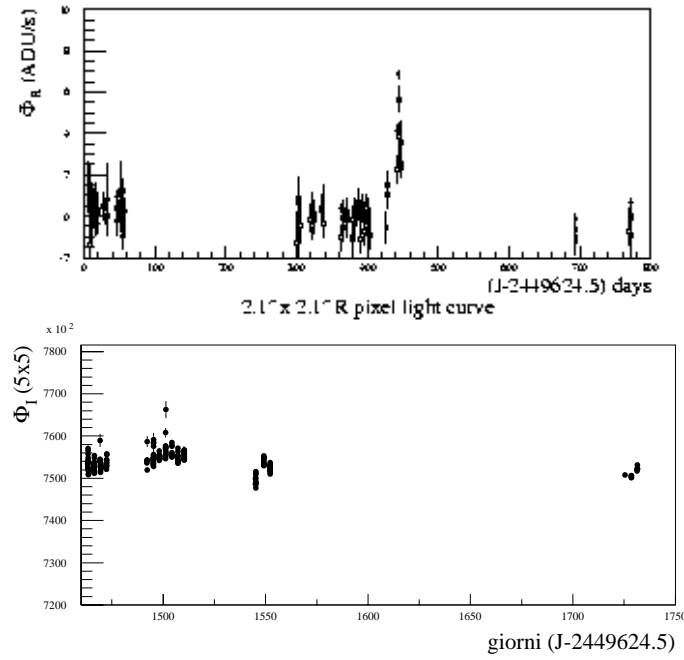


Figura 4.8: Il candidato AGAPEZ1 sui dati TBL (in alto) e il prolungamento della relativa curva di luce sui dati MDM.

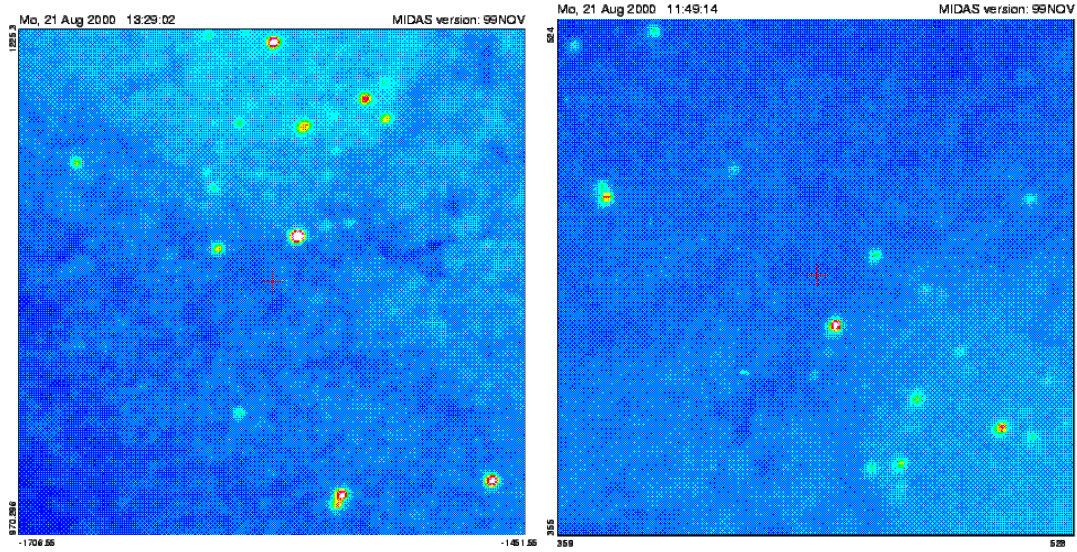


Figura 4.9: Immagini del campo INT (a sinistra) e del campo Control-MDM centrata sulla posizione, evidenziata con una croce, del candidato evento *microlensing* rilevato dalla collaborazione POINT-AGAPE.

lizziamo in particolare i dati acquisiti nel filtro *I*. Inoltre, basandoci sulle informazioni appena ricordate circa la funzione di amplificazione e sulla conoscenza del flusso a riposo nel filtro *I* della sorgente non amplificata, siamo in grado di riportare nello stesso grafico il profilo della curva di luce di Paczyński del candidato. Le fluttuazioni rilevate sulla curva di luce MDM sono trascurabili rispetto alla variazione di luminosità caratteristica dell'evento. La stabilità dei dati MDM ne conferma quindi, rispetto alla caratteristica dell'*unicità*, l'interpretazione come evento di *microlensing*.

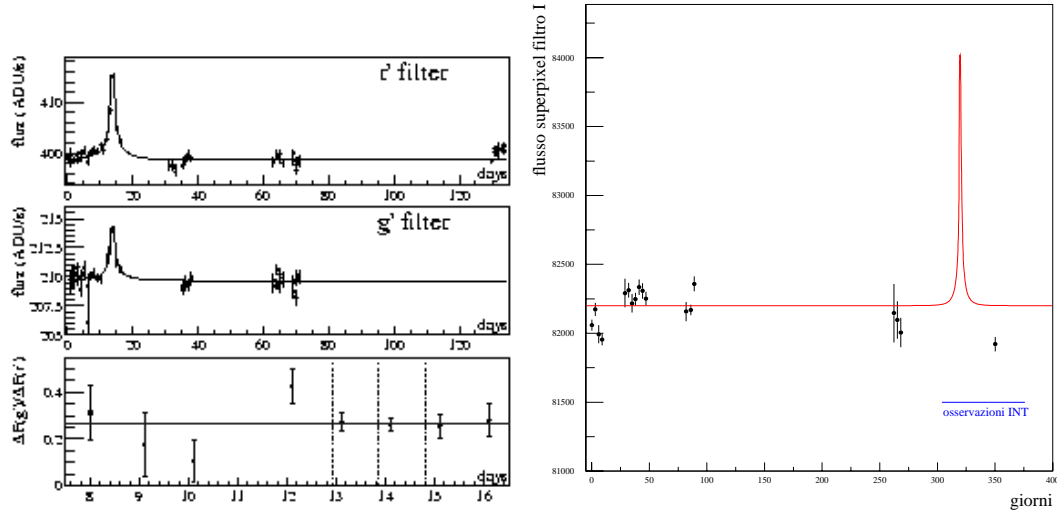


Figura 4.10: La curva di luce del candidato PA-99-N1 sui dati INT (a sinistra), i giorni corrispondono a J-2451392.5. La curva di luce relativa sui dati MDM. La curva continua sovrapposta è quella del candidato PA-99-N1 costruita a partire dalle informazioni dedotte dal fit di Paczyński a 7 parametri e dai dati HST. E' evidenziato inoltre il periodo delle osservazioni INT (iniziate nel agosto 1999).

4.4 Introduzione all'analisi dei dati MDM

Discutiamo ora la selezione, e quindi l'analisi, delle curve di luce sui dati MDM. Come ricordato in precedenza, lo studio delle variazioni di luminosità è legato alla valutazione della funzione di verosimiglianza L lungo la curva di luce. Una volta delimitato un *cluster* di pixel interessanti, determiniamo il pixel "attivo" come quello dove L assume valore massimo. Individuati i pixel attivi, si prosegue l'analisi con uno studio della forma della curva di luce. Per questo interpoliamo i dati sperimentali con una curva di Paczyński. Segue un'analisi della bontà del fit. I risultati ottenuti sono quindi confrontati con le previsioni delle simulazioni Monte Carlo dell'esperienza.

Notiamo che un approccio brutale alla selezione basato sullo studio della forma di *tutti* i pixel del campo, oltre agli evidenti problemi legati ai tempi di calcolo, non risolverebbe i problemi legati alla difficoltà di selezione dei *clusters*. Una selezione basata esclusivamente sulla stima del χ^2 e sullo studio dei residui *non* è in alcun modo proponibile: per esempio, una curva stabile nei limiti del rumore (caratterizzabile per esempio con un valore della verosimiglianza nullo, $L = 0$) *deve* avere $\chi^2 \simeq 1$ e un buon comportamento dei residui. E' fondamentale cioè tenere presente la tendenza alla "clusterizzazione" nei casi in cui si hanno delle autentiche variazioni di luminosità, e di conseguenza l'importanza, una volta delimitato il *cluster*, di determinarne quello che abbiamo indicato come pixel "attivo". Solo allora l'analisi della forma assume significato. Notiamo inoltre che, anche se all'interno di un *cluster* la curva di luce di un pixel differente da quello riconosciuto come centro attivo soddisfacesse a differenza di questo gli ulteriori criteri di forma, questa andrebbe comunque eliminata dall'analisi.

Riassumiamo i vari momenti della selezione e dell'analisi delle curve di luce

- dati *tutti* i pixel del campo⁴, selezione di quelli che mostrano una (e una soltanto) variazione di luminosità, attraverso
 - valutazione della funzione di verosimiglianza, ed eventualmente della durata dell'evento (t_{eff});
 - "clusterizzazione" e determinazione dei pixel "attivi";
- dati i pixel così selezionati, studio della forma della curva di luce, attraverso
 - valutazione dei parametri con un fit di Paczyński a 6 parametri;

⁴Dalla selezione vengono naturalmente esclusi quelli dove sono presenti delle stelle risolte, essendo la zona di influenza stellare, ipotizzata una forma di PSF gaussiana, determinata proporzionalmente al flusso.

- test di bontà del fit;
- acromaticità;
- completezza temporale;
- confronto dei risultati con le previsioni delle simulazioni Monte Carlo.

Con “completezza temporale” si intende la possibilità di caratterizzare adeguatamente la variazione di luminosità sulla curva di luce rispetto ai dati sperimentali. Questo ci porta all’esclusione delle curve di luce per cui (al solito i punti amplificati sono definiti come quelli il cui valore del flusso supera di 3σ quello del livello di fondo)

- non ci siano almeno 3 punti attorno al valore dell’istante di massima amplificazione nell’intervallo dove $A > A_0/2$;
- non ci sia nessun punto sulla salita (ovvero sulla discesa).

Riguardo a questo criterio, nella fase di selezione automatica siamo comunque relativamente tolleranti, e ci riserviamo, nella fase finale, di escludere curve di luce passate attraverso il filtro della selezione che mostrano problemi in questo senso.

Circa le simulazione Monte Carlo, abbiamo visto come l’informazione importante che ne possiamo estrarre è la caratterizzazione dei parametri “osservabili” degli eventi di *microlensing*, date differenti configurazioni. Di questo, considerando anche la qualità e l’effettiva distribuzione temporale delle misure, teniamo conto nella fase finale dell’analisi.

Come ordine di grandezza, dati i circa 4 milioni di pixel che formano il campo analizzato (di cui $\sim 10\%$ sono nella zona di influenza delle stelle risolte) i pixel attivi dopo il primo processo di selezione e “clusterizzazione” sono nell’ordine delle migliaia, quelli che soddisfano quindi ai criteri di forma richiesti sono nell’ordine delle decine.

4.4.1 I *clusters*

Circa la selezione dei *clusters*, calcolato L lungo tutte le curve di luce, è necessario fissare un limite inferiore per delimitare quelli significativi. Questo è necessario per consentire al programma di rilevamento automatico⁵ di distinguere il segnale fisico dal rumore determinato dalle fluttuazioni. Abbassare la soglia di rilevazione porta da una parte a essere sensibili a eventi a bassa amplificazione relativamente lunghi, dall’altra a eventi brevi con alta amplificazione. In questo limite però i differenti *clusters* tendono a fondersi gli uni con gli altri, rendendo difficile l’identificazione dei distinti centri attivi (per valori di L molto elevati il numero di *clusters* inizia con crescere al decrescere di L , per poi alla fine decrescere). La scelta dei limiti che determinano la selezione è quindi delicata perché coinvolge anche la nostra abilità a separare eventuali *clusters* vicini determinati però da variazioni di luminosità di sorgenti distinte. Per facilitare la selezione dei pixel attivi viene quindi introdotto, a questo punto, un primo criterio di forma sulla curva di luce. Lungo la curva di questa si calcolano cioè le funzioni di verosimiglianza per le due variazioni di luminosità più significative. Questo ci permette di eliminare subito, in accordo con il criterio di unicità degli eventi di *microlensing*, curve di luce altrimenti variabili. Del resto ricordiamo ancora quanto detto circa i limiti della funzione L . Non dobbiamo cercare di estrarne più informazioni di quante sia in grado di darci, in particolare sulla valutazione della reale rilevanza della seconda variazione di luminosità rispetto alla prima. E’ solo in seguito, attraverso altri specifici criteri di forma, che selezioniamo le curve di luce effettivamente interessanti.

Riguardo al problema della tendenza alla fusione dei differenti *clusters* nel momento in cui si scelgono valori di L_1^{inf} relativamente bassi, abbiamo adottato la seguente strategia. Fissato un valore minimo L_1^{info} , eseguita la selezione, la ripetiamo una prima volta scegliendo un valore $L_1^{inf1} > L_1^{info}$, quindi una seconda, con un valore $L_1^{inf2} > L_1^{inf1}$, questo fino al momento in cui nella nuova selezione non emergono più nuovi *clusters* interessanti (Fig.4.11). In pratica, ripetiamo questa operazione 4 volte. Al momento del calcolo della funzione di verosimiglianza sulla curva di luce viene fatta anche una stima di alcune altre caratteristiche della variazione di luminosità, tra le quali una sensibile alla sua durata (detta t_{eff}). Sempre con lo scopo di abbassare ulteriormente il valore minimo di soglia di L_1 , una ulteriore selezione è stata fatta introducendo come criterio anche un limite superiore su questo parametro. Occorre tenere

⁵Programma sviluppato all’interno della collaborazione AGAPE.

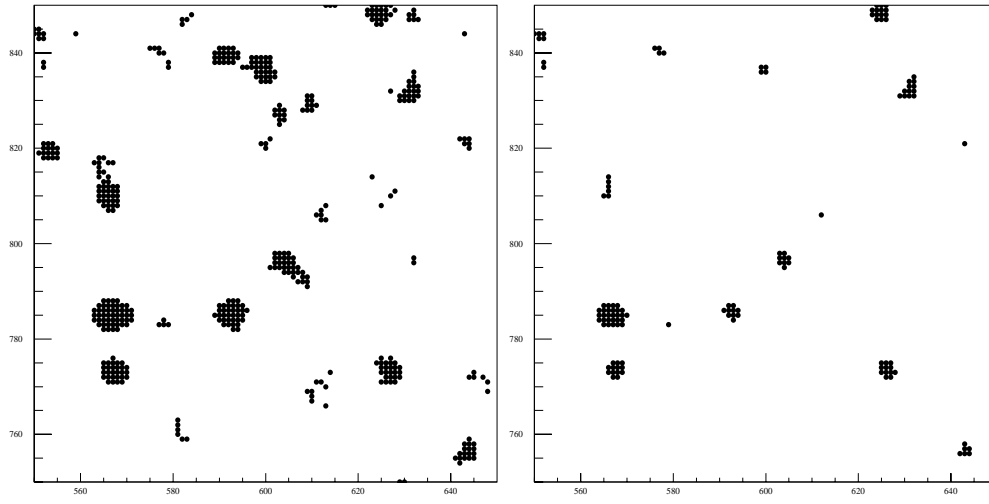


Figura 4.11: Esempio di *clusters*. In una regione di 100×100 pixel, sono evidenziati in nero i pixel rappresentativi delle corrispondenti curve di luce dove risulta, con $L_2/L_1 < 0.1$, $L_1 > 100$ (a sinistra) e $L_1 > 300$. Dove a un valore elevato di L corrisponde solo una fluttuazione statistica, il *cluster* corrispondente tende a scomparire aumentando il valore di soglia della selezione.

presente che l'introduzione di limiti superiori può tuttavia essere pericolosa nella misura in cui si possono selezionare dei *bordi* di *clusters* in cui per esempio vale $L_2 > L_2^{sup}$, ovvero in cui il pixel selezionato non sia il reale pixel “attivo” del *cluster*. I risultati dell'analisi in cui introduciamo dei limiti superiori vanno quindi considerati con particolare attenzione. Notiamo comunque che il programma di rilevamento automatico dei *clusters* utilizzato è concepito in modo da poter gestire situazioni del genere.

4.4.2 La selezione

Il principio seguito per la selezione è stato quello della massima flessibilità possibile. Si è cercato cioè di selezionare tutti i pixel dove fossero avvenute delle variazioni di luminosità significative, affidando alla successiva analisi della forma l'esclusione delle curve non compatibili con eventi di *microlensing*. Per questo si è cercato in tutti i modi di abbassare la soglia inferiore su L_1 , e, invece della più stretta condizione $L_2 < L_2^{sup}$ si è scelta la più elastica $L_2/L_1 < \epsilon$. Ricordiamo infatti che il valore di L_1 è legato anche al *numero* di immagini che mostrano una variazione di luminosità significativa, e che siamo interessati specialmente alla selezione di eventi di breve durata temporale. Sempre per questo motivo abbiamo fatto delle selezioni introducendo il parametro t_{eff} . Abbiamo posto cioè i seguenti valori di soglia per la selezione delle curve di luce interessanti

- una prima selezione basata solo sulla funzione di verosimiglianza
 - $L_1 > 100$;
 - $L_2/L_1 < 0.1$;
- una seconda selezione dove si è introdotto anche un taglio sulla valutazione della durata dell'amplificazione, riducendo la soglia su L_1
 - $L_1 > 50$;
 - $L_2/L_1 < 0.1$;
 - $t_{eff} < 20$ giorni;
- ricordando il problema della fusione dei *clusters* abbiamo quindi fatto le seguenti ulteriori selezioni
 - $L_1 > 300, L_1 > 600, L_1 > 1000$;
 - $L_2/L_1 < 0.1$.

Tutte le analisi sono state compiute per le curve di luce formate dalle sole immagini composte (1 punto per ogni notte di osservazione), come per quelle dove si sono composte un massimo di 4 immagini consecutive. Naturalmente nei due casi gli stessi tagli utilizzati assumono un significato differente. In particolare, la selezione sulle immagini composte non “vede” nessuno degli eventi a bassa amplificazione rilevati centrati nel periodo di giugno 1999 dove ci sono solo 6 notti consecutive di osservazione.

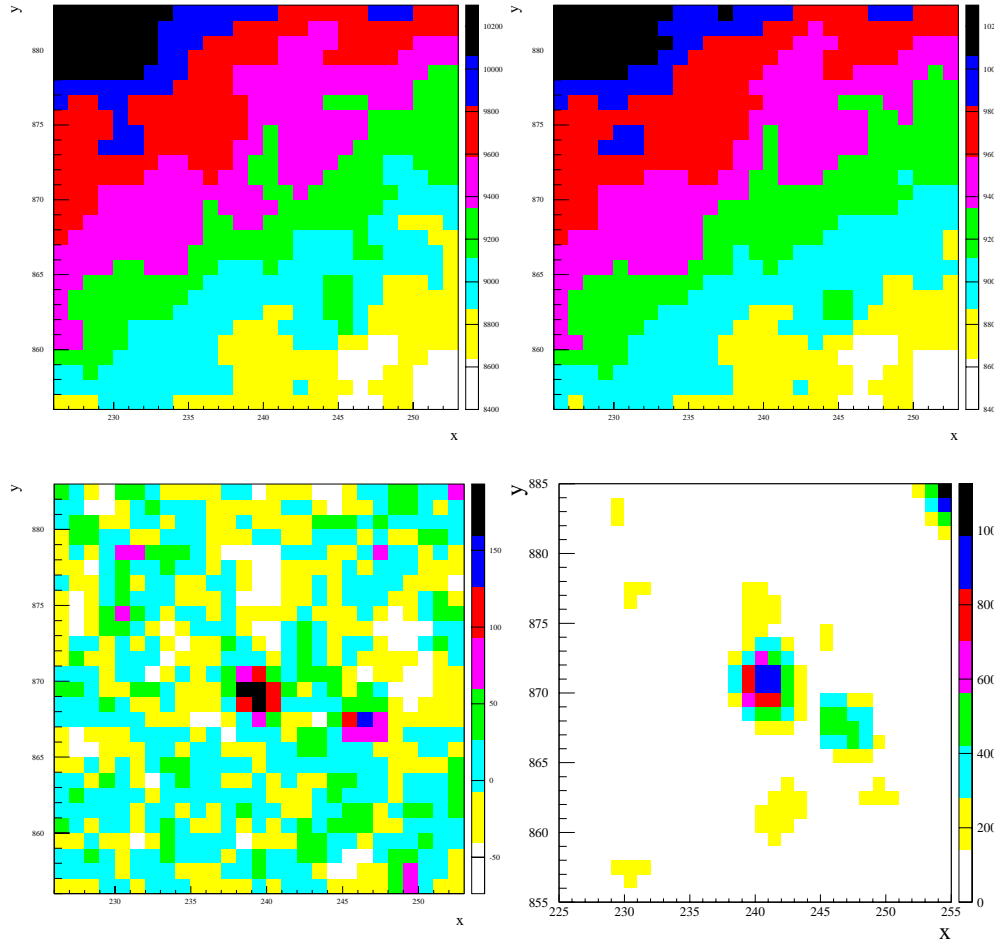


Figura 4.12: Immagini allineate fotometricamente della stessa regione di cielo in due istanti differenti centrati sul pixel di una curva di luce selezionata (in alto), l’immagine differenza (a sinistra) e la carta dei valori della funzione di verosimiglianza L_1 .

Abbiamo più volte insistito sul fatto che la *rilevazione* delle variazioni di luminosità avviene in base a uno studio sulla curva di luce, dunque muovendosi lungo la dimensione *temporale*. E’ sempre possibile, però, un’analisi *a posteriori* sulle immagini (dimensione *spaziale*). In Fig. 4.12 (alto), mostriamo due immagini della stessa regione di cielo⁶ acquisite in due istanti differenti, allineate fotometricamente, in cui il valore del flusso (nei pixel) è indicato dalle variazioni di colore. Si nota il gradiente di luminosità determinato dal centro galattico, e, in particolare, *nessuna* differenza, al di fuori delle fluttuazioni statistiche, tra le due immagini. L’analisi attraverso la valutazione della funzione di verosimiglianza L_1 rivela come la curva di luce del pixel centrale sia interessata da una forte variazione di luminosità (la carta dei valori di L_1 è mostrata in Fig. 4.12 in basso a destra). L’immagine in alto a destra in Fig. 4.12 è proprio quella relativa al momento di massima amplificazione, quella a sinistra in un momento in cui la sorgente è ancora, anche nella curva di luce, confusa nel fondo. Nell’immagine *differenza*, Fig. 4.12 in basso a sinistra, è evidente l’eccesso di flusso attorno al pixel centrale. La curva di luce relativa è discussa nel paragrafo dedicato ai candidati esclusi (candidato *e3*).

⁶L’origine è traslata rispetto a quella del campo di 948 pixel lungo entrambi gli assi.

4.4.3 Determinazione dei parametri della curva di luce e discussione dell'analisi dei residui

Date le curve di luce selezionate, interpoliamo i dati sperimentali con una curva di Paczyński a 4 parametri. In particolare, considerando le curve di luce nei due colori e vincolando i parametri geometrici a essere uguali, facciamo un fit per le due curve contemporaneamente con 6 parametri indipendenti. Quindi valutiamo l'accordo tra il modello teorico della curva di luce di Paczyński e i dati sperimentali basandoci sui 4 seguenti test

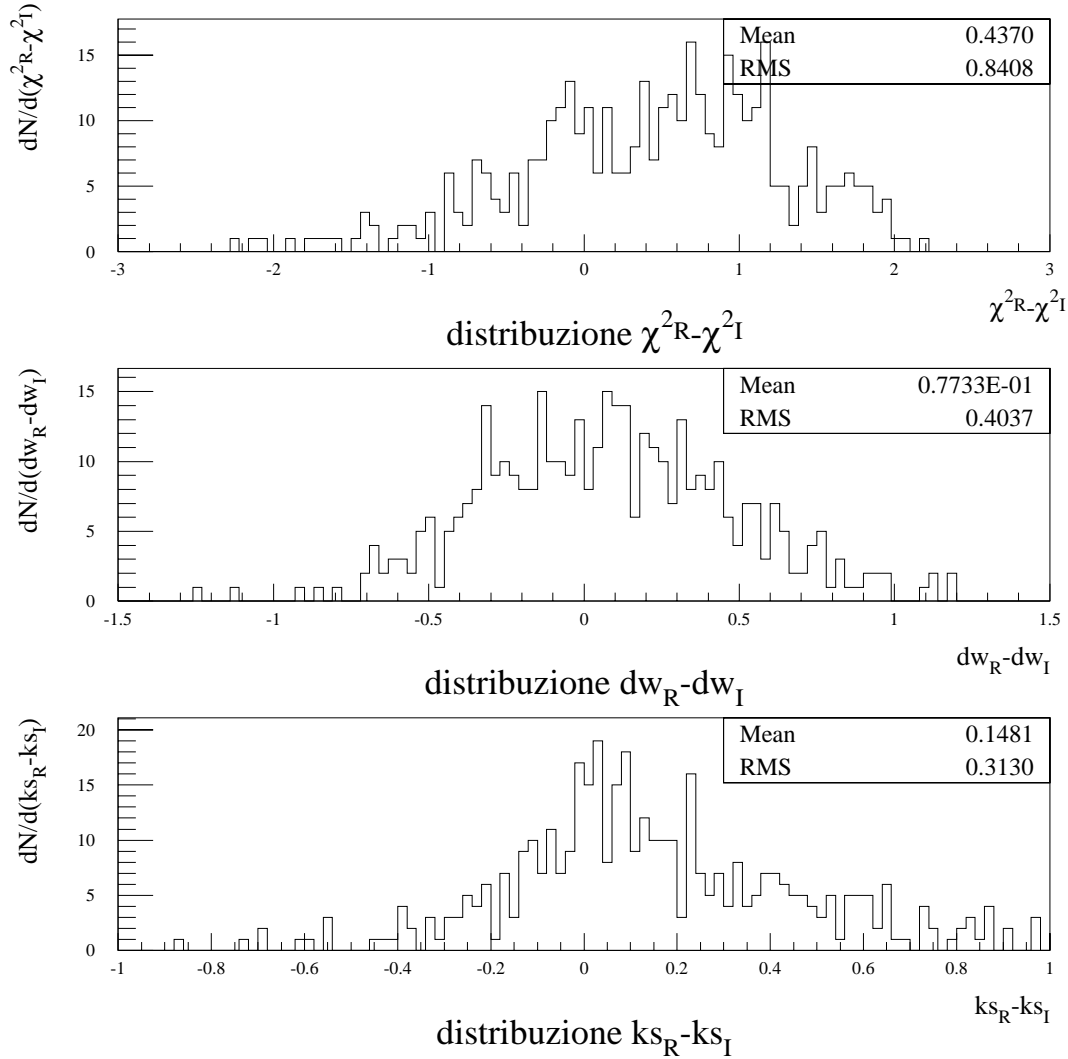


Figura 4.13: Risultati dei fit *indipendenti* a 4 parametri, confronto per le grandezze valutate nei due colori: il χ^2 , il coefficiente di Kolmogorov-Smirnov e il coefficiente di Durbin-Watson.

- valutazione del χ^2 ;
- test sui residui di Durbin-Watson;
- test sui residui di Kolmogorov-Smirnov;
- test di acromaticità sulle deviazioni dalla linea di *background*.

Ricordiamo che *tutti* i test sono legati allo studio dell'*acromaticità* dell'evento.

Ora intendiamo mostrare, su un campione di dati significativo, quali sono le relazioni tra i primi 3 criteri di selezione, ovvero tra quelli che valutano direttamente la bontà della regressione. Questo ci

permette di chiarire da una parte la pertinenza di questo approccio, dall'altra di valutare quali sono i limiti significativi che in seguito utilizziamo per la selezione delle curve di luce potenzialmente interessanti (e sulle quali studiamo poi in dettaglio la cromaticità). Diamo inoltre l'ordine di grandezza delle curve di luce che vengono escluse con l'applicazione dei diversi criteri. Consideriamo in particolare la selezione effettuata sulle curve di luce con un solo punto per ogni notte di osservazione con i criteri di selezione $L_2/L_1 < 0.1$ e $L_1 > 100, 300, 600, 1000$.

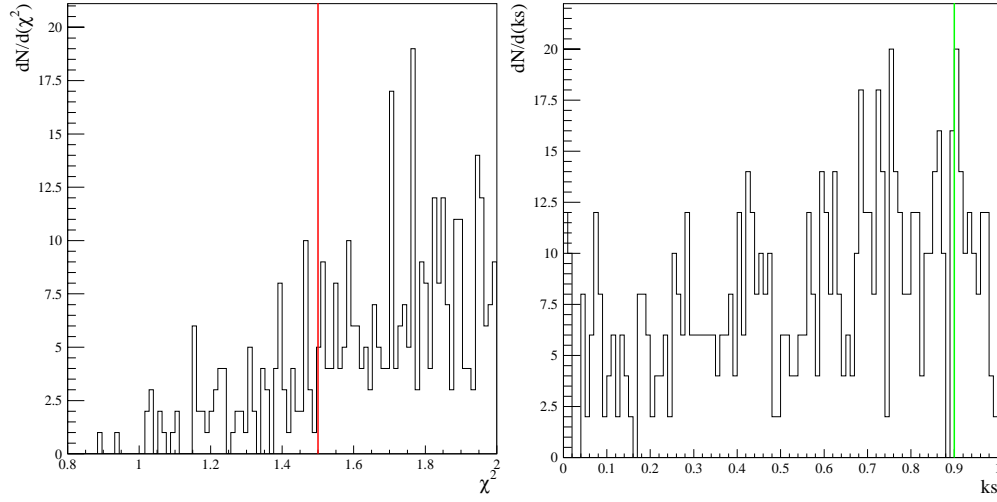


Figura 4.14: Distribuzione per i valori del χ^2 e per il coefficiente di Kolmogorov-Smirnov (fit a 6 parametri) in entrambi i casi stimati sulle curve di luce nei due colori contemporaneamente.

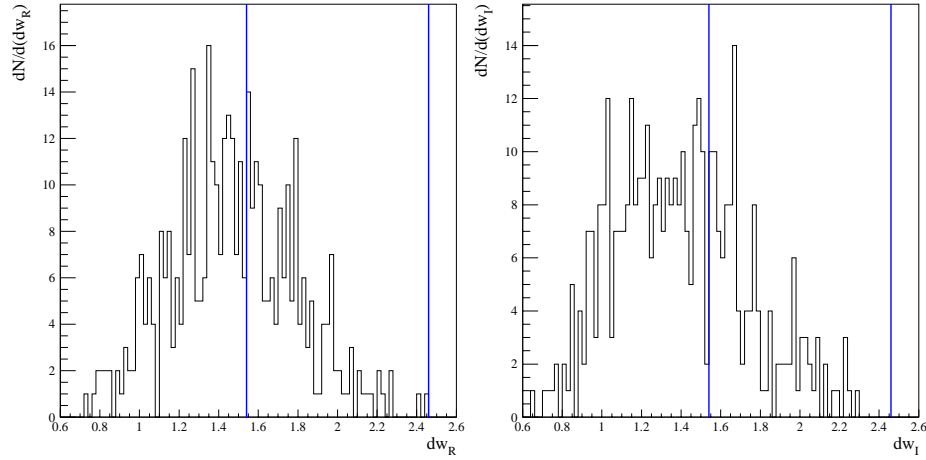


Figura 4.15: Distribuzione per i valori dei coefficienti di Durbin-Watson per le curve nei due colori (fit a 6 parametri).

Date le $\sim 4 \cdot 10^6$ curve di luce di partenza, ci restringiamo con questi tagli a $\sim 4 \cdot 10^3$ curve di luce. Consideriamo su queste un campione per cui risulta $\chi^2 < 2$, dove il χ^2 (al solito intendiamo χ^2/ndf) è quello calcolato in seguito alla valutazione dei 6 parametri delle due curve di luce. Questo riduce il campione a $\sim 4 \cdot 10^2$ curve di luce. Il motivo per cui non eseguiamo questo tipo di analisi su tutto il campione dei pixel ritenuti come interessanti in seguito alle diverse selezioni è legato ai problemi emersi nel corso di un'analisi dettagliata sui pixel selezionati altrimenti. Si è infatti rilevato come spesso, in particolare come risultato della selezione con il criterio supplementare $t_{eff} < 20$ giorni, avessimo selezionato dei *bordi* di *clusters*, per cui è stata poi necessaria un'operazione di ricentraggio. Di fatto, eventualmente in seguito a ricentraggio, alcune curve di luce interessanti sono state comunque selezionate grazie a questi criteri. Non riteniamo però un campione che le includa, senza aver proceduto in via preliminare a questa operazione,

veramente significativo. Per questo motivo ci limitiamo a questa selezione, quella meno sensibile a questo problema. In seguito, su un campione più ristretto sul quale avremo avuto cura di rilevare eventuali problemi di questo tipo, svolgiamo una completa analisi quantitativa.

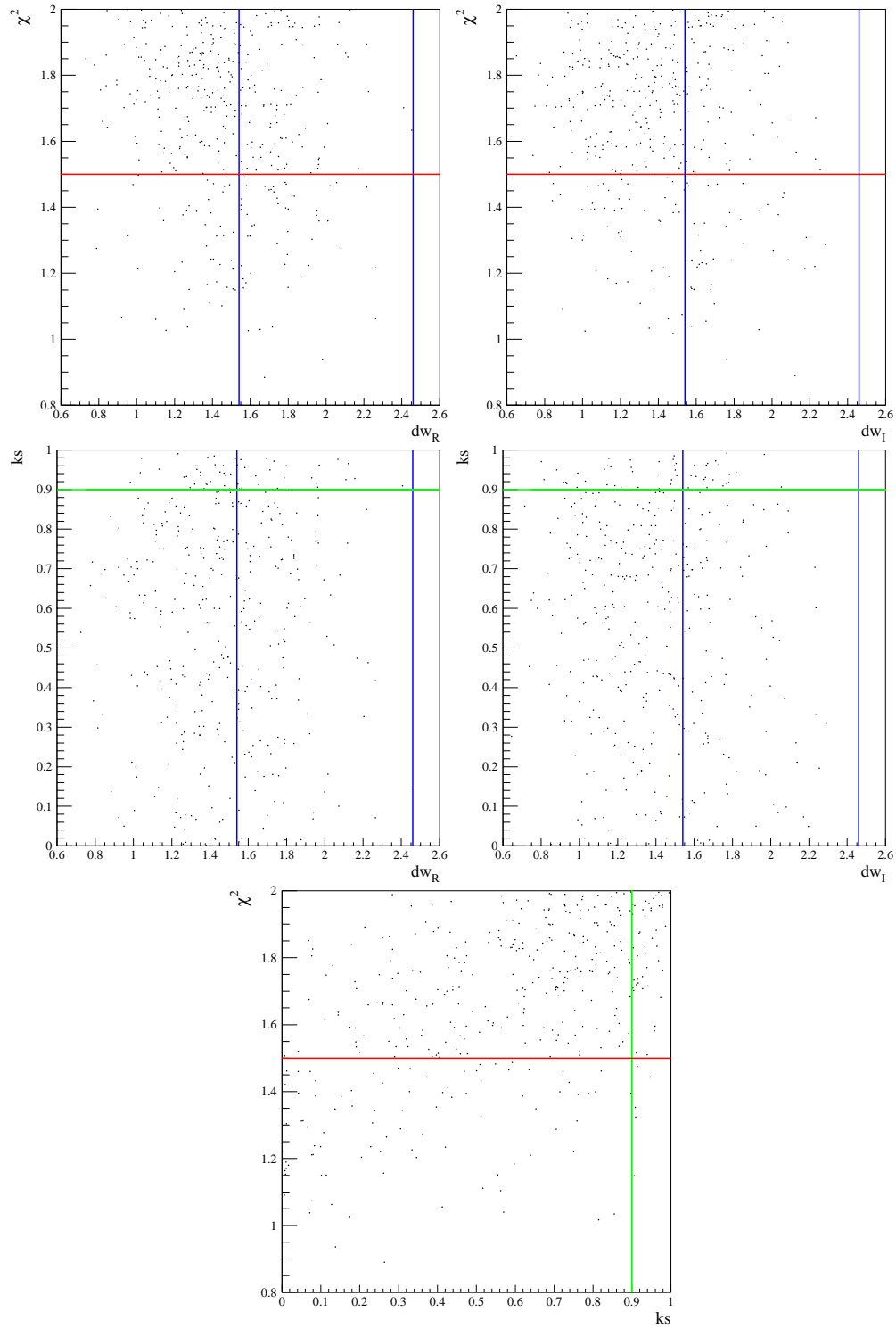


Figura 4.16: Dall'alto: relazione tra i valori del χ^2 e dei coefficienti $dw_{(R,I)}$, tra i valori del coefficiente ks e $dw_{(R,I)}$ e tra i valori del χ^2 e del coefficiente ks (fit a 6 parametri).

Per quanto poi non vengano effettivamente utilizzati nell'analisi, cominciamo con il valutare l'accordo esistente tra i fit *indipendenti* tra i due colori, valutandone il χ^2 , che indichiamo con $\chi_R^{(4)}$ e $\chi_I^{(4)}$ rispettivamente per il fit a 4 parametri per la curva di luce nel rosso e nell'infrarosso, e $ks_R^{(4)}$ e $ks_I^{(4)}$, i coefficienti di Kolmogorov-Smirnov valutati per le due curve di luce nei due colori separatamente (rispettivamente per il filtro rosso e infrarosso) (notiamo che in questo caso, essendo il numero di punti lungo ogni curva di luce ~ 40 , il test non può dirsi veramente significativo, al contrario di quello in cui consideriamo tutti i residui dei due colori contemporaneamente). Confrontiamo inoltre i valori dei coefficienti di Durbin-Watson, sempre nei due colori rosso e infrarosso, $dw_R^{(4)}$ e $dw_I^{(4)}$. In particolare (Fig.4.13) osserviamo la distribuzione della differenza di questi 3 insiemi di grandezze (l'esponente ⁽⁴⁾ ricorda che si tratta di quantità calcolate con il fit a 4 parametri).

Mentre possiamo osservare come i risultati siano compatibili tra i due colori, si può notare tuttavia un piccolo effetto sistematico che sembra “favorire” i fit delle curve di luce nell'infrarosso. In realtà questo è dovuto al fatto che spesso a significative variazioni nel rosso, non corrispondono altrettanto significative variazioni nell'infrarosso, e il fit di curve meno agitate risulta spesso migliore.

Passiamo ora all'analisi dei risultati del fit a 6 parametri su quale basiamo effettivamente la selezione. Facciamo in particolare riferimento ai seguenti valori

- $\chi^2 \leq 1.5^7$;
- $ks \leq 0.90$;
- $1.54 < dw_{R,I} < 2.46$;

(gli ultimi due fissano, per il test di Durbin-Watson dato il numero di gradi di libertà, un livello di confidenza del 10%, e notiamo come non sia in realtà mai verificato $dw > 2.46$). Mostriamo le distribuzioni per il χ^2 , il coefficiente di Kolmogorov-Smirnov (Fig.4.14) e i coefficienti di Durbin-Watson (Fig.4.15) nei due colori.

Le linee verticali, in questi grafici e nei successivi, sono disegnate rispettivamente per i valori $\chi^2 = 1.5$, $ks = 0.90$, e $dw_{R,I} = 1.54$ e $dw_{R,I} = 2.46$. I limiti $\chi^2 \leq 1.5$, $ks \leq 0.90$ e $1.54 < dw_{R(I)} < 2.46$, indipendentemente, selezionano $\sim 24\%$, 86% , 32% e il 42% delle curve di luce rispettivamente. Osserviamo come il test di Kolmogorov-Smirnov sia il meno “efficace” criterio di esclusione.

Consideriamo ora le relazioni tra i differenti coefficienti. Quello che ci interessa mostrare è la sostanziale *indipendenza* dei differenti criteri.

Consideriamo la relazione tra i coefficienti di Durbin-Watson e il χ^2 (Fig. 4.16 in alto) e quella tra i coefficienti di Durbin-Watson e i coefficienti di Kolmogorov-Smirnov (Fig.4.16 al centro), sostanzialmente omogenee nello spazio dei coefficienti rispetto ai diversi limiti.

Mostriamo infine (Fig.4.16 in basso) la relazione tra il χ^2 e il coefficiente di Kolmogorv-Smirnov. Notiamo in questo caso una più accentuata correlazione. Nella zona di intersezione $\chi^2 \leq 1.5$ e $ks \leq 0.90$ rimangono $\sim 23\%$ delle curve di luce (il secondo criterio risulta in questo caso quasi del tutto ininfluente).

Le intersezioni dello spazio dei parametri $1.54 < dw_{R,I} < 2.46$ e $\chi^2 \leq 1.5$ contengono il $\sim 12\%$ delle curve di luce, mentre nella regione $1.54 < dw_{R(I)} < 2.46$ e $ks \leq 0.90$ rimangono $\sim 35\%$ (27%) delle curve di luce rispettivamente. La richiesta contemporanea che un evento nei due colori sia tale che $\chi^2 \leq 1.5$, $ks \leq 0.90$ e $1.54 < dw_{R,I} < 2.46$ ci porta alla selezione di $\sim 11\%$ delle curve di luce (questo sempre rispetto al campione per cui $\chi^2 \leq 2$, mentre rispetto a tutti i pixel del campione iniziale questo corrisponde a selezionarne una frazione dello 0.05%).

Circa la scelta effettiva dei criteri di esclusione sulla base della valutazione della bontà del fit, posto che vogliamo essere ragionevolmente selettivi, in accordo con le considerazioni appena svolte, scegliamo il livello di confidenza del 10% (il più stretto per cui sia stato calcolato l'intervallo di accettazione) per il test di Durbin-Watson (per entrambi i colori contemporaneamente mentre in questa discussione sono stati considerati separatamente) e coerentemente lo stesso livello di confidenza per il test di Kolmogorov-Smirnov, mentre poniamo un limite leggermente più conservativo sul χ^2 pari a 1.5.

4.4.4 Un altro approccio alla caratterizzazione della curva: il fit a 7 parametri

Abbiamo discusso nel capitolo precedente delle possibilità offerte da una strategia di interpolazione con un fit a 4 parametri rispetto a uno a 5 parametri, nel caso di eventi *simulati*. In particolare, risulta (come

⁷ Al solito intendiamo $\chi^2 \equiv \chi^2/n_{df}$.

previsto) che non è in generale possibile determinare senza ambiguità i 5 parametri del fit. Abbiamo inoltre messo in evidenza le differenze emerse nei risultati di test di ipotesi sulla bontà del fit.

Sullo stesso campione di curve di luce analizzato nel paragrafo precedente, eseguiamo ora un'analisi a partire da un fit a 5 parametri sulle due curve di luce imponendo la condizione dell'uguaglianza delle grandezze “geometriche” caratteristiche dell'amplificazione di un evento di *microlensing*, e cioè l'istante della massima amplificazione, t_0 , il parametro di impatto minimo normalizzato rispetto al *raggio di Einstein*, u_0 , e il *tempo di Einstein*, t_E . Rimangono poi da valutare il flusso di *background* e il flusso della sorgente non amplificata, grandezze queste dipendenti dal colore. Abbiamo così un fit con 7 parametri indipendenti da determinare. Intendiamo ora confrontare, sull'insieme delle curve di luce, i risultati del fit a 7 parametri rispetto al caso a 6 parametri, in particolare le eventuali differenze nell'analisi dei residui. Sottolineiamo che comunque non è in generale possibile fare affidamento sul valore calcolato dei singoli parametri responsabili dell'amplificazione. Notiamo infine che il test conclusivo sulla cromaticità, l'andamento costante nel tempo del rapporto delle deviazioni rispetto al *background* dei punti sul *bump*, *non* dipende dal tipo di fit.

Definiamo $A(p)$ per il parametro p valutato con il fit a 6 o a 7 parametri ($p(6)$ e $p(7)$) come

$$A(p) = \frac{p(6) - p(7)}{p(6)}. \quad (4.2)$$

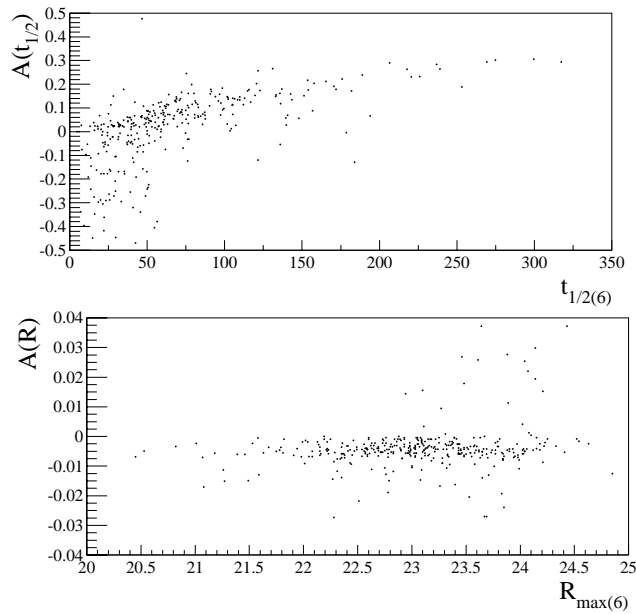


Figura 4.17: La valutazione relativa delle grandezze osservabili $t_{1/2}$ (in alto) e R_{max} per il fit a 6 rispetto a quello a 7 parametri.

Risulta di nuovo evidente che il fit a 4 (ovvero, in questo contesto a 6) parametri, con un valore del χ^2/ndf leggermente più elevato sull'insieme delle curve, sovrastima la durata dell'evento (in particolare questo accade al crescere di $t_{1/2}$) e sottostima l'amplificazione rispetto al *background* (Fig. 4.17), *background* che del resto appare sottostimato coerentemente con questi due fatti. Osserviamo che questi effetti sono significativi solo nella misura in cui è evidente una sistematicità, in quanto il valore assoluto delle differenze effettive osservate è in realtà piccolo rispetto all'indeterminazione intrinseca legata alla valutazione dei parametri.

E' comunque interessante osservare che l'analisi statistica sui residui ottenuti dal fit a 5 (ovvero a 7) parametri tende (come già osservato nella simulazione) a essere più tollerante, a parità di livello di confidenza, per quanto riguarda il test sulla correlazione di Durbin-Watson. Il test sulla distribuzione dei residui di Kolmogorov-Smirnov non dà invece, in media, risultati differenti nei due casi. Nel corso dell'analisi teniamo conto anche di questo aspetto, attribuendogli comunque un ruolo di “controllo” piuttosto che di criterio.

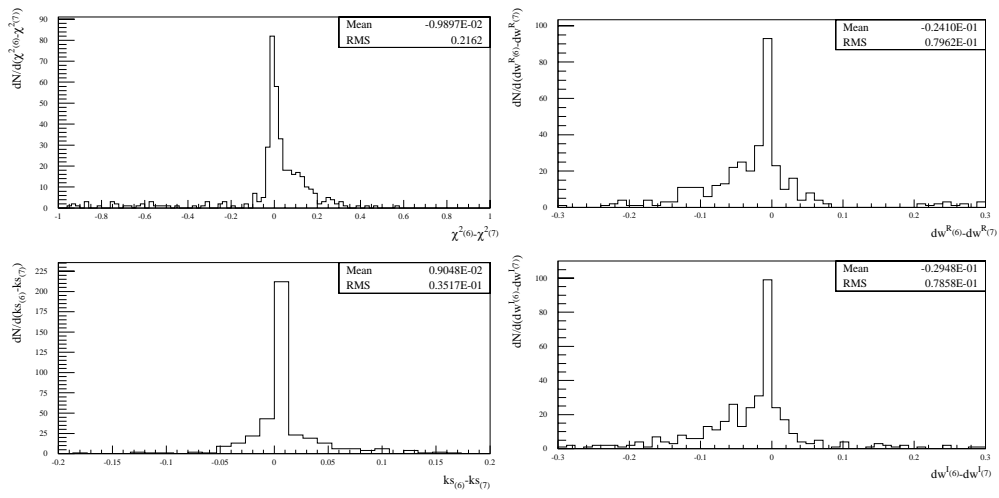


Figura 4.18: Confronto tra il valore del χ^2 e i coefficienti dei test di ipotesi sui residui per i fit a 6 e 7 parametri.

Una preziosa integrazione all'analisi sarebbe l'osservazione diretta della sorgente non amplificata, non possibile sui nostri dati, ma eventualmente accessibile per esempio sulle immagini di archivio del telescopio spaziale HST. L'informazione sul flusso, consentendo di fissare uno dei parametri della curva di luce, permetterebbe una determinazione senza ambiguità delle caratteristiche della funzione di amplificazione.

4.5 La selezione: discussione su alcune curve di luce escluse

Prima di passare alla descrizione e alla discussione delle curve di luce che soddisfano tutti i criteri di selezione e sono quindi considerate compatibili con un evento di *microlensing*, diamo alcuni esempi di curve di luce che *non* soddisfano alcuni dei criteri di selezione. Questo ci permette di apprezzare la qualità dei dati, di evidenziare l'importanza di avere dati in 2 colori e la necessità di una base temporale più lunga, e di vedere in pratica l'azione dei vari criteri di selezione, in particolare lo studio della cromaticità.

Analizziamo un campione di 8 curve di luce (Figg. 4.19 e 4.20). Riportiamo in Tabella 4.5 le loro caratteristiche principali come valutate dal fit a 6 parametri e i risultati dei differenti test di ipotesi.

id	$t_{1/2}$	R_{max}	$R - I$	χ^2	dw_R	dw_I	ks
$e1$	26	21.6	0.5	1.3	1.75	1.84	0.71
$e2$	33	22.5	≤ 0.2	1.2	1.78	1.65	0.26
$e3$	46	20.8	0.5	1.0	1.27	1.35	0.08
$e4$	20	22.0	1.2	1.3	1.61	1.63	0.62
$e5$	37	22.7	1.1	1.3	1.62	1.75	0.24
$e6$	6	22.2	1.0	1.4	1.56	1.58	0.20
$e7$	77	22.1	1.9	1.1	1.79	1.59	0.11
$e8$	26	21.8	0.8	1.3	1.96	2.03	0.09

Tabella 4.5: Selezione: alcune curve di luce escluse

Discutiamo ora i motivi del loro rigetto rispetto all'ipotesi che siano eventi di *microlensing*.

Il candidato $e1$ viene escluso in seguito all'analisi della cromaticità. Studiamo la funzione δ_{RI} come una funzione del tempo lungo i 14 punti che caratterizzano la variazione di luminosità nel secondo periodo di osservazioni. Tra parentesi indichiamo la dispersione associata alla stima del coefficiente⁸.

$$\delta_{RI} = 0.961(0.065), \quad \chi_0^2 = 0.37;$$

$$\delta_{RI} = 0.99(0.12) - 0.003(0.010) \cdot t, \quad \chi_1^2 = 0.39;$$

⁸L'origine dei tempi viene spostata in corrispondenza del primo punto del *bump*.

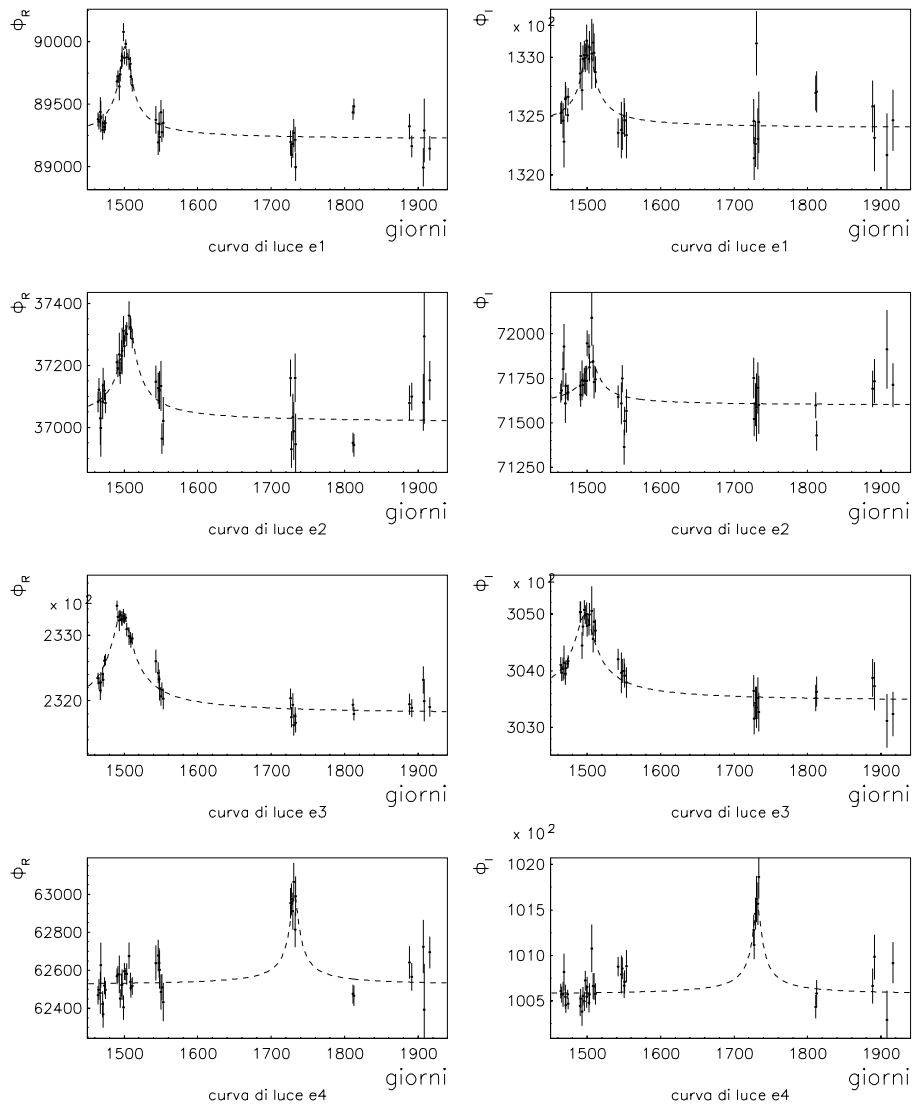


Figura 4.19: 8 curve di luce di candidati eventi di *microlensing* poi rigettati nella fase finale di analisi della forma (1). In ascissa, il tempo espresso in giorni (J-2449624.5), in ordinate il flusso espresso in ADU.

$$\delta_{RI} = 0.83(0.16) + 0.049(0.038) \cdot t - 0.0025(0.0018) \cdot t^2, \quad \chi^2_2 = 0.24. \quad (4.3)$$

Vediamo allora che l'interpolazione con un polinomio di secondo grado nella variabile temporale è significativamente migliore (al livello di confidenza indicato, di 1σ) di quello di ordine zero. Il termine di *curvatura*, $c_2 = -0.0025$ è piccolo ma significativamente differente da zero (comportamento del resto confermato dall'ispezione della curva $\delta_{RI}(t)$ nella Fig. 4.21).

La curva di luce e2 presenta una variazione di luminosità significativa solo nel filtro *R*. Per questo motivo, non potendo allora effettuare in modo accurato l'analisi della cromaticità, non la riteniamo come possibile candidato evento di *microlensing*.

La curva di luce e3, propria di un candidato evento ad alta amplificazione, viene rigettata per il criterio di Durbin-Watson al livello di confidenza del 10% (in realtà, già a quello del 2%). Anche in questo caso, dai risultati del fit a 7 parametri, dove generalmente i test di ipotesi sui reali eventi di *microlensing* tendono più facilmente ad "accettare", il risultato sul test di Durbin-Watson rimane invariato, risultando $dw_{R(7)} = 1.29$ e $dw_{I(7)} = 1.33$. In questo caso appare rilevante anche l'ulteriore indicazione fornita dal test di Durbin-Watson sui residui calcolati nella sola zona del *bump* (definita

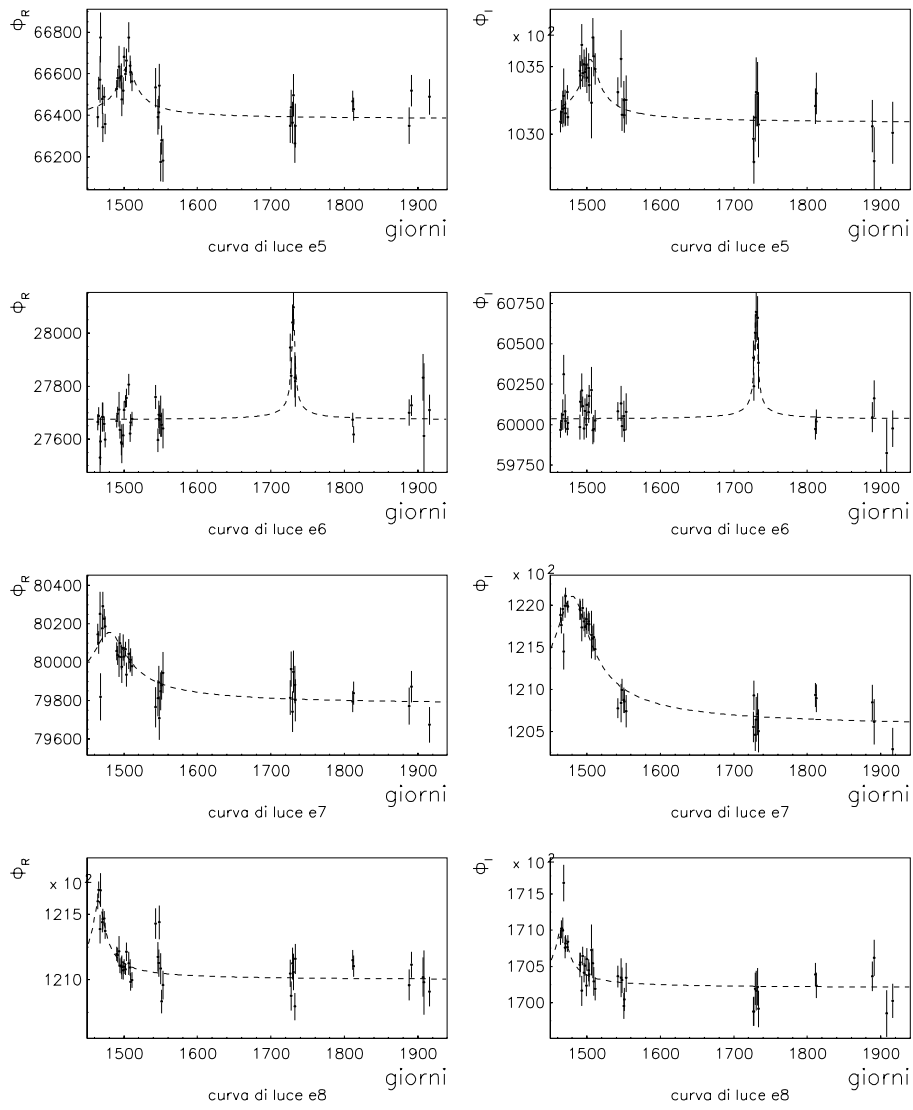


Figura 4.20: 8 curve di luce di candidati eventi di *microlensing* poi rigettati nella fase finale di analisi della forma (2). In ascissa, il tempo espresso in giorni (J-2449624.5), in ordinate il flusso espresso in ADU.

in modo meno restrittivo rispetto a quanto fatto nell'analisi della cromaticità). In particolare, guidati dall'unica indicazione della durata $t_{1/2}$, consideriamo tutti i primi 29 punti sulla curva di luce. In questo caso essendo l'intervallo di *esclusione* limitato superiormente dal valore 1.34 (al 10% *C.L.*), risulta $dw_R = 1.00$ e $dw_I = 1.32$. Infine notiamo che l'analisi della cromaticità rivela, sia pure marginalmente, un miglioramento dell'interpolazione con un polinomio del secondo ordine nel tempo rispetto a una costante per il rapporto $\delta_{RI}(t)$.

La curva di luce *e4*, rilevata seguendo la strategia di costruire la curva di luce con più di una immagine per ogni notte di osservazione, risulta fortemente cromatica. Lungo i 6 punti che definiscono la variazione di luminosità, il coefficiente di correlazione è significativamente piccolo, $\rho = 0.1$. Inoltre risulta, interpolando la $\delta_{RI}(t)$, $\chi^2_2 = 0.41 \ll \chi^2_0 = 1.0$.

La curva di luce *e5* viene esclusa in seguito alla valutazione del coefficiente di correlazione lineare, significativamente piccolo, pari a $\rho = 0.34$ lungo i 19 punti che definiscono la variazione di luminosità.

La curva di luce *e6*, caratterizzata da una durata temporale molto breve, $t_{1/2} \sim 6$ giorni, rilevata seguendo la stessa strategia che per la *e4*, viene esclusa in seguito all'analisi della cromaticità, eseguita sui 6 punti che caratterizzano la variazione di luminosità. Risulta infatti $\chi^2_1 = 0.38 < \chi^2_0 = 1.22$ con $b_1 = -0.084$ (0.039). Il coefficiente di correlazione, inoltre, è significativamente piccolo ($\rho = 0.5$).

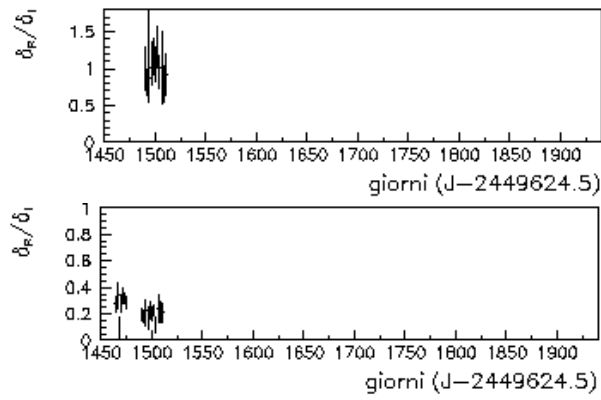


Figura 4.21: Effetto cromatico per la curva di luce $e1$ (in alto), e $e7$.

La curva di luce $e7$ viene esclusa per la cromaticità rilevata nell'andamento della $\delta_{RI}(t)$. Risulta infatti per $\delta_{RI}(t) = \text{costante} = 0.234$ (0.012) con $\chi^2_0 = 1.1$, e $\delta_{RI}(t) = -2.6 \cdot 10^{-3}$ ($8.0 \cdot 10^{-4}$) + 0.30 (0.02) con $\chi^2_1 = 0.61$. Benché nel secondo caso il χ^2 sia minore a quello valutato con l'interpolazione di una costante, l'angolo di deviazione da un andamento costante è davvero molto piccolo. Facciamo allora ricorso al test di ipotesi di Durbin-Watson. Sui 22 punti che definiscono il *bump*, il limite inferiore di accettazione è fissato a 1.43 (5% *C.L.*). Risulta, per l'interpolazione con la retta variabile nel tempo, $dw = 1.96$, ovvero un valore estremamente vicino a 2, il limite ideale di bontà per un fit i cui residui risultino *non* correlati. Il coefficiente di Durbin-Watson sull'interpolazione con una costante risulta invece uguale a $1.26 \ll 1.43$. Riconosciamo in questo modo il carattere cromatico della curva di luce. Guardando l'andamento temporale di δ_{RI} si ha del resto visivamente (Fig. 4.21 in basso) l'impressione di un diverso livello del rapporto, che pure rimane sostanzialmente costante, nella fase di salita rispetto a quella di discesa. Un simile comportamento è tipico delle sorgenti intrinsecamente variabili.

La curva di luce $e8$, che soddisfa *tutti* i criteri di selezione sulla bontà del fit e sull'analisi della cromaticità, viene esclusa poiché non ci sono sufficienti punti lungo la salita per descrivere adeguatamente il suo comportamento (criterio di “completezza temporale”), soprattutto riguardo all'essenziale proprietà dell'indipendenza dal colore, per il cui test è necessario avere una completa copertura delle misure lungo tutto il *bump*.

Osserviamo che questa analisi, e quella svolta su tutte le altre curve di luce poi escluse, *elimina*, tra gli altri, tutti quei candidati con caratteristiche altrimenti favorevoli alla loro interpretazione come fenomeni di *microlensing* rispetto all'accordo della stima dell'ampiezza temporale $t_{1/2}$ e della magnitudine al massimo R_{max} con le previsioni delle simulazioni Monte Carlo.

Sottolineiamo del resto la possibilità di rilevare (specie sfruttando le differenti strategie di composizione delle immagini) e quindi di analizzare adeguatamente anche curve di luce caratterizzate da una durata temporale molto breve (come la curva di luce $e6$).

In conclusione di questa analisi possiamo osservare come, mentre molti dei candidati vengano esclusi in base a considerazioni basate sullo studio della acromaticità, in particolare con il test sull'andamento temporale di δ_{RI} , in alcuni casi sono piuttosto i test di compatibilità statistica con la curva di Paczyński, il test di Kolmogorov-Smirnov o il test di Durbin-Watson, a spingerci all'esclusione di una curva di luce. Nel caso in cui allora risulti (e questo test è indipendente dal fit) $\delta_{RI} = \text{costante}$ (come per la curva di luce $e3$), può sorgere il dubbio che la curva di luce sia propria di un evento di *microlensing* per la descrizione del quale l'approssimazione di Paczyński non sia appropriata. Per esempio, date le distanze relative sorgente-lente, che possono essere molto piccole rispetto a quella osservatore-lente, potrebbero essere importanti effetti di sorgente finita. Un'analisi in questo senso (resa significativa soprattutto dalla possibilità di studiare le curve di luce in due colori) che può essere estesa anche a eventuali eventi doppi, da noi esclusi dal principio con la richiesta sulla funzione di verosimiglianza sulle eventuali seconde variazioni di luminosità ($L_2/L_1 < 0.1$), è al momento in fase di studio.

id	RA,DEC(J2000)	$t_{1/2}$	R_{max}	$R - I$	ϕ_b^R	ϕ_b^I	t_0
$s1$	00h43m54s.3, 41°8'12".0	58 ± 6	22.5 ± 0.1	1.5 ± 0.2	22800	55550	1490
$s2$	00h43m8s.2, 41°3'44".0	48 ± 11	23.1 ± 0.1	1.4 ± 0.2	26500	59720	1502
$s3$	00h43m29s.6, 41°19'51".3	60 ± 9	22.3 ± 0.1	1.4 ± 0.2	51850	87740	1500
$s4$	00h42m55s.9, 41°15'54".1	105 ± 14	21.8 ± 0.1	1.5 ± 0.2	219060	285600	1522
$s5$	00h42m45s.4, 41°10'1".0	70 ± 11	22.8 ± 0.1	2.0 ± 0.2	55160	92400	1495

Tabella 4.6: Candidati eventi di *microlensing*: caratteristiche

4.6 La selezione: i “candidati”

Passiamo ora alla discussione dei risultati dell’analisi. Abbiamo esposto i diversi approcci alla selezione: immagini composte con un punto per notte invece che con diversi punti per notte, e i criteri di selezione, i test di compatibilità sul fit e il test di correlazione.

Circa il primo punto, poiché non è stata selezionata alcuna curva compatibile con un evento di Paczyński con un tempo di variazione tanto rapido (e quindi con variazioni di luminosità apprezzabili anche nel corso della stessa notte) da giustificare il ricorso a un’analisi della compatibilità del fit su una curva di luce con più punti durante la stessa notte, abbiamo svolto di fatto tutta l’analisi dello studio della forma sulle curve di luce costruite con un punto per ogni notte.

Come osservato in precedenza svolgiamo la selezione con un criterio di unicità della variazione di luminosità richiesto *ab initio* ponendo un limite superiore al rapporto L_2/L_1 (nonostante le difficoltà evidenziate di attribuire un preciso significato alle informazioni tratte dalla valutazione delle funzione L). D’altra parte, dato l’elevato numero di sorgenti *differenti* che potenzialmente possono contribuire a tali variazioni, tale criterio di unicità potrebbe essere in realtà precisato, nel senso di richiedere unicità per escludere variazioni di luminosità effettivamente equivalenti, e abbiamo visto che l’analisi sulla funzione di verosimiglianza non è del tutto adeguata a questo studio. Questo problema è evidentemente critico per la rilevazione di variazioni di luminosità con tempi caratteristici brevi, dove anche il numero di punti significativi al fine del calcolo della funzione L è piccolo. Per tali variazioni si potrebbe del resto contemplare la possibilità di effettuare *anche* uno studio circoscritto alla sola variazione di luminosità sulle immagini non composte.

Con l’esclusione dei test sulla cromaticità in senso proprio (studio delle deviazioni dal fondo nei due colori per i punti sul *bump*), tutta l’analisi seguente è stata svolta su tutti i 42 (40) punti delle curve di luce costruite a partire dalle immagini prese con il filtro R (I).

I criteri di selezione utilizzati si basano sui risultati del fit sulle due curve di luce a 6 parametri (fit che tiene esplicitamente conto della richiesta di acromaticità). Come analisi complementare, partendo da un campione ristretto, abbiamo poi ripetuto la selezione utilizzando il fit a 7 parametri.

Le curve sono selezionate in accordo ai criteri discussi già discussi in precedenza, ovvero

- completezza temporale;
- $\chi^2 \leq 1.5$;
- $ks \leq 0.90$ (10% $C.L.$);
- $1.54 < dw_{R,I} < 2.46$ (10% $C.L.$);
- acromaticità sul *bump* (correlazione lineare significativa al 99% e rapporto δ_{RI} costante a 1σ).

Ricordiamo che il pixel sul quale viene effettuata l’analisi della forma è quello, all’interno di un determinato *cluster*, caratterizzato dal valore *massimo* della funzione di verosimiglianza L .

Selezioniamo in questo modo 5 (*cinque*) curve di luce che soddisfano a tutti i criteri richiesti. In Tabella 4.6 riportiamo i valori dei parametri come calcolati dal fit a 6 parametri. Il livello di *background* espresso in ADU, $\phi_{background}^{R(I)} \equiv \phi_b^{R(I)}$, le deviazioni $\Delta\phi_0^{R(I)}$ nei due colori espresse in termini della magnitudine al massimo nei filtri R e I standard, il momento di massima amplificazione t_0 (in giorni, pari a J-2449624.5, determinato con una dispersione di ~ 1 giorno), la valutazione del tempo caratteristico di variazione $t_{1/2}$ in giorni, infine la posizione all’interno del campo Target espressa in ascensione e declinazione retta.

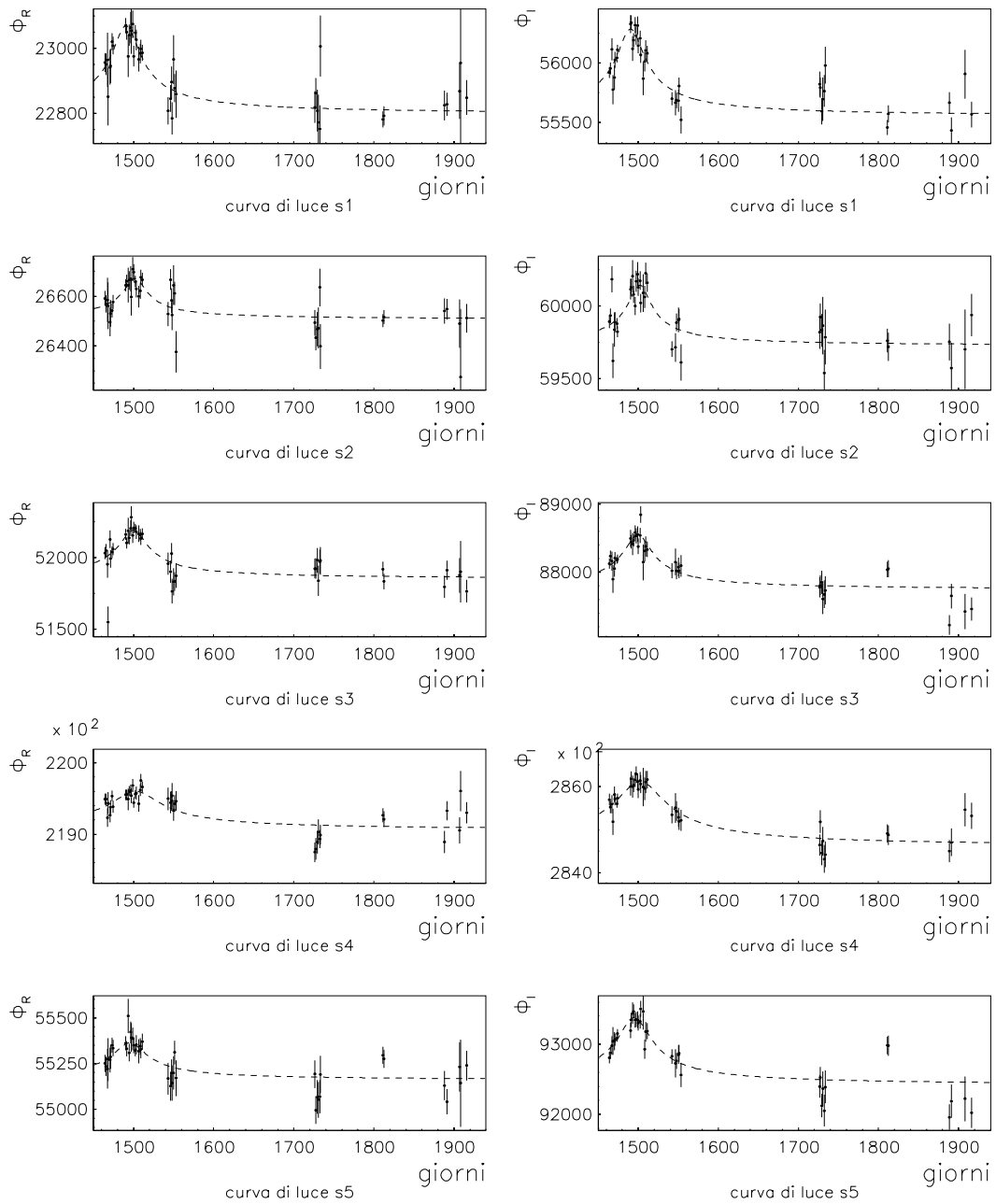


Figura 4.22: Le curve di luce dei candidati eventi di *microlensing*. In ascissa, il tempo espresso in giorni (J-2449624.5), in ordinate il flusso espresso in ADU.

La magnitudine al massimo nei filtri standard è calcolata a partire dal parametro $\Delta\phi_0^{R(I)}$ espresso in ADU (misurato in un superpixel) ricordando la valutazione dell'equazione di colore (2.1) e introducendo opportunamente il fattore 0.87 della frazione di *seeing*.

Dalla differenza di magnitudini al massimo, ovvero dal rapporto degli incrementi di flusso nei due colori (rapporto *costante* per gli eventi selezionati), è possibile risalire a una valutazione della *temperatura di colore* (T_c) della sorgente, risultando questa per gli eventi trovati compresa nell'intervallo tra $2000 \div 2600 \text{ K}$. Per questa valutazione, dove teniamo conto della trasmissione dei filtri e dell'efficienza quantistica della camera ma non dei possibili effetti cromatici nell'assorbimento atmosferico, assumiamo che lo spettro della stella sia ben approssimato da quello di un *corpo nero*. Questa stima va comunque letta piuttosto come un limite inferiore della *temperatura effettiva* della sorgente⁹.

⁹Nel caso delle *giganti rosse*, classi spettrali K0-M6, sono state per esempio rilevate [127] forti differenze, fino a 600 K ,

Riportiamo (Tabella 4.7) inoltre, per gli eventi selezionati, i valori dei coefficienti relativi ai differenti criteri di selezione sulla compatibilità del fit.

id	dw_R	dw_I	ks	χ^2
$s1$	2.28	2.16	0.07	1.2
$s2$	1.75	1.97	0.18	1.4
$s3$	2.01	1.83	0.19	1.4
$s4$	1.57	1.68	0.01	1.2
$s5$	1.59	1.56	0.76	1.5

Tabella 4.7: Candidati eventi di *microlensing*: analisi statistica

id	n_{bump}	ρ	χ_0^2	χ_1^2	χ_2^2	dw_δ
$s1$	22	0.89	0.34	0.35	0.31	1.67 (1.43)
$s2$	16	0.69	0.38	0.41	0.42	2.60 (1.37)
$s3$	22	0.69	0.68	0.71	0.74	2.37 (1.43)
$s4$	18	0.59	0.77	0.80	0.79	2.46 (1.39)
$s5$	22	0.64	0.57	0.59	0.62	2.33 (1.43)

Tabella 4.8: Candidati eventi di *microlensing*: analisi della cromaticità

Questi, Tabella 4.8, i valori relativi al test di acromaticità. Indichiamo con n_{bump} il numero di punti che defisce la variazione di luminosità lungo i quali il test viene effettuato. Il coefficiente di correlazione, fissato il numero di gradi di libertà, è significativo al 99%. Infine calcoliamo il coefficiente di Durbin-Watson (dw_δ) per la distribuzione dei residui attorno alla curva interpolante $\delta_{RI} = \text{costante}$ (tra parentesi il limite inferiore dell'intervallo fissato dalla statistica di Durbin-Watson per il dato numero di punti del *bump* essendo il livello di significatività sempre quello del 10%). Circa

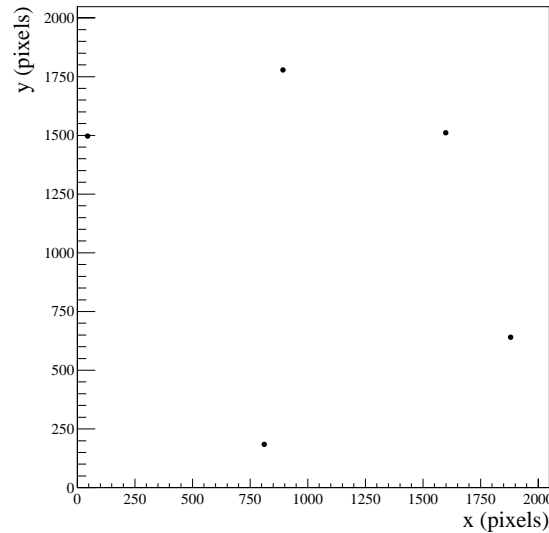


Figura 4.23: La posizione dei 5 candidati eventi di *microlensing* selezionati sul campo Target.

Per gli stessi eventi, questi (Tabella 4.9) i parametri *osservabili*, e i valori dei coefficienti dei test di ipotesi sul fit a 7 parametri.

Come è possibile osservare i valori dei parametri caratteristici sulla curva di luce stimati dai due differenti fit sono compatibili tra di loro. I test di ipotesi danno anche risposte equivalenti.

Come passaggio conclusivo, tenendo in considerazione quanto emerso dall'analisi sull'efficienza svolta nel capitolo precedente, abbiamo effettuato l'analisi con il fit a 7 parametri. Il risultato *cambia*. Oltre ai 5 tra la stima della temperatura di colore e la temperatura effettiva.

id	$t_{1/2}$	R_{max}	$R - I$		dw_R	dw_I	ks	χ^2
$s1$	52	22.6	1.5		2.34	2.23	0.02	1.2
$s2$	46	23.2	1.4		1.67	1.94	0.23	1.4
$s3$	56	22.4	1.3		2.02	1.81	0.12	1.4
$s4$	90	21.9	1.5		1.62	1.74	0.01	1.1
$s5$	64	22.8	2.0		1.61	1.54	0.80	1.5

Tabella 4.9: Candidati eventi di *microlensing*: l'analisi con il fit a 7 parametri

candidati selezionati (che come abbiamo appena visto soddisfano ancora tutte le condizioni di selezione), 2 nuove curve di luce entrano in giuoco.

Queste (Tabella 4.10) le loro caratteristiche fisiche (che risultano indipendenti dalla procedura di minimizzazione)

id	$t_{1/2}$	R_{max}	$R - I$
$z1$	39	22.1	0.8
$z2$	15	22.3	0.5

Tabella 4.10: Candidati eventi di *microlensing*: nuova analisi con il fit a 7 parametri

Il valore del χ^2 e quello dei coefficienti di Durbin-Watson risultano decisivi per la loro discriminazione nel corso dell'analisi con il fit a 6 parametri (Tabella 4.11). Le rispettive curve di luce sono mostrate in Fig. 4.24.

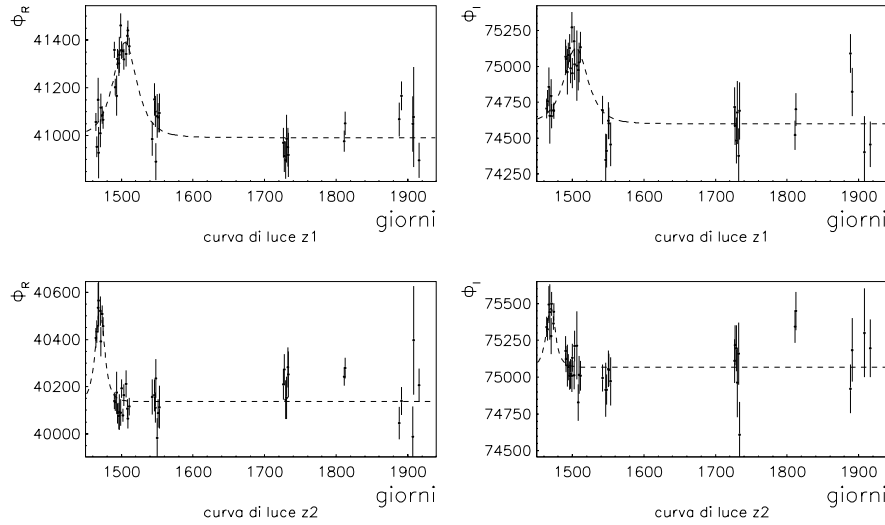


Figura 4.24: Le curve di luce delle due variazioni di luminosità compatibili con un evento di *microlensing* con il fit non degenera a 7 parametri, ma rigettate nell'analisi svolta con il fit degenera a 6 parametri. In ascissa, il tempo espresso in giorni (J-2449624.5), in ordinate il flusso espresso in ADU.

id	$dw_R^{(7)}$	$dw_I^{(7)}$	$ks^{(7)}$	$\chi^{2(7)}$		$dw_R^{(6)}$	$dw_I^{(6)}$	$ks^{(6)}$	$\chi^{2(6)}$
$z1$	1.97	1.67	0.73	1.5		1.84	1.51	0.73	1.7
$z2$	1.68	1.95	0.13	1.4		1.39	1.78	0.43	1.9

Tabella 4.11: Candidati eventi di *microlensing*: nuova analisi con il fit a 7 parametri (2)

4.7 Discussione dei risultati

Per affrontare lo studio della composizione della materia oscura degli aloni galattici sotto forma di oggetti massivi compatti (di cui il *microlensing* è un metodo efficace di rilevamento), confrontiamo i risultati ottenuti (5 curve di luce compatibili con un evento di *microlensing*) con le previsioni delle simulazioni Monte Carlo discusse nel capitolo precedente.

In particolare studiamo dove si situano le curve di luce selezionate nello spazio dei parametri osservabili, ampiezza temporale caratteristica e magnitudine al massimo. Consideriamo due situazioni estreme per la massa del MACHO dell'alone, fissata altrimenti quella del MACHO nel *bulge*

- $m_{bulge}^{MACHO} = 0.4 M_{\odot}$, $m_{alone}^{MACHO} = 0.5 M_{\odot}$;
- $m_{bulge}^{MACHO} = 0.4 M_{\odot}$, $m_{alone}^{MACHO} = 0.01 M_{\odot}$.

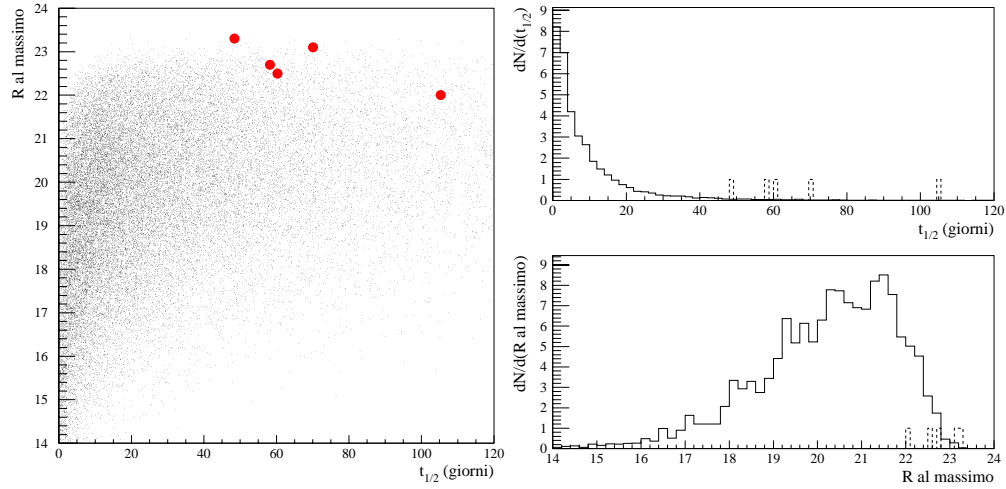


Figura 4.25: Le curve di luce selezionate nello spazio dei parametri $t_{1/2}$, R_{max} , caso con $m_{alone}^{MACHO} = 0.01 M_{\odot}$. Le unità sull'asse verticale delle distribuzioni (a destra) sono arbitrarie.

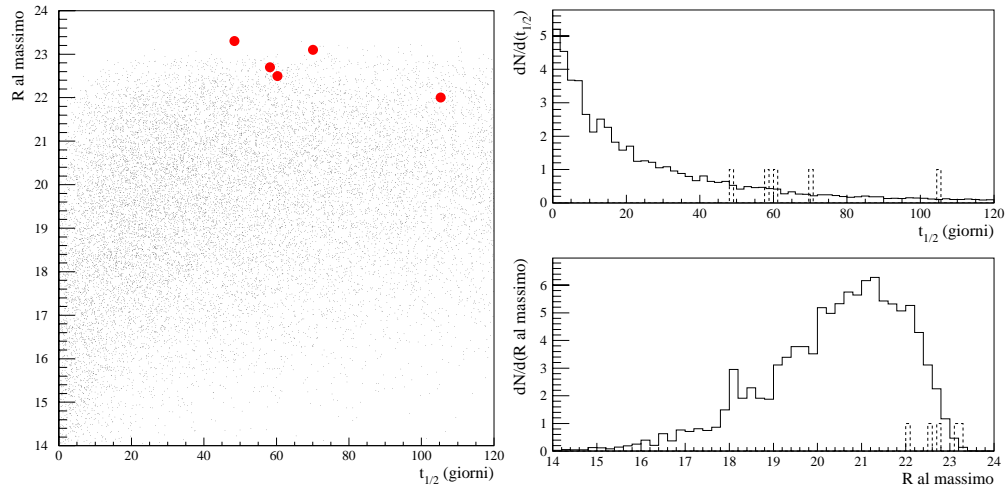


Figura 4.26: Le curve di luce selezionate nello spazio dei parametri $t_{1/2}$, R_{max} , caso con $m_{alone}^{MACHO} = 0.5 M_{\odot}$. Le unità sull'asse verticale delle distribuzioni (a destra) sono arbitrarie.

Possiamo allora osservare che in entrambi i casi i candidati selezionati giacciono tutti nelle zone estreme nello spazio dei parametri ammissibile delimitato dalle previsioni Monte Carlo. Abbiamo già osservato la

presenza di un limite di sensibilità di rilevamento (limite sostanzialmente indipendente dalla scelta della massa) intorno a $R_{max} \sim 23$. In particolare, anche nel caso con massa del MACHO nell'alone maggiore, dove le distribuzioni si discostano meno dai risultati della selezione, $\sim 80\%$ degli eventi di *microlensing* previsti sono caratterizzati da una ampiezza temporale caratteristica $t_{1/2} < 35$ giorni e da un eccesso di flusso $R_{max} < 22$, limiti al di sotto dei quali *non* abbiamo selezionato nessuna curva di luce.

Il secondo importante elemento fornito dalla simulazione Monte Carlo è il *numero* degli eventi aspettato, che abbiamo visto, per un alone composto interamente da MACHOS, variare con la massa (con $m_{alone}^{MACHO} = 5 \cdot 10^{-1}, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3} M_{\odot}$ risulta rispettivamente $\sim 14, 20, 25, 21$). In ogni caso questo è molto maggiore del numero degli eventi selezionati.

Per una lettura corretta di questo risultato occorre comunque ricordare, circa la simulazione utilizzata, come la già sottolineata mancanza, al momento, di una valutazione completa dell'efficacità di rilevamento suggerisca di leggere questi numeri piuttosto come dei limiti superiori al numero di eventi realmente aspettato. Inoltre abbiamo già messo in evidenza il *bias* introdotto nella selezione, dove ci siamo ristretti al caso della curva di luce di Paczyński (sorgente e lente puntiformi, moto unifrome). In questo senso, la possibilità di un confronto con i risultati dell'analisi viene indebolita (notiamo poi che esiste una dipendenza, non altrimenti approfondita, di questi risultati dal modello di alone e dall'intervallo di massa scelto per i MACHOs).

E' comunque rilevante il dato fisico: solo una parte dell'alone potrebbe essere composto da oggetti oscuri rilevabili con il *microlensing*. A questo proposito ricordiamo i risultati delle collaborazioni MACHO e EROS (già discussi in precedenza) consistenti con una frazione di alone del $\sim 20\%$ composta da oggetti oscuri di massa $\sim 0.4 M_{\odot}$.

In accordo con questi risultati la selezione sui dati MDM, con la cautela necessaria imposta dai differenti problemi messi in evidenza, tende a confermare che solo una piccola frazione di alone sia composta di MACHOs. In particolare, guardando il dato significativo della tipologia dei candidati selezionati, siamo portati a escludere che questi possano essere oggetti di massa molto piccola ($m^{MACHO} \leq 0.01 M_{\odot}$).

L'alternativa naturale al *microlensing* nell'interpretazione di una variazione di luminosità è quella di una stella variabile. In questo senso sarebbe importante poter disporre di un migliore campionamento delle misure (questo per avere l'opportunità di una migliore caratterizzazione della forma della curva di luce, in particolare dell'acromaticità) su una base temporale più lunga (questo per avere la possibilità di osservare l'eventuale ripetizione della variazione di luminosità). Una ricerca sistematica di altri segnali variabili sui dati a disposizione non è stata ancora effettuata.

Come risultato indicativo possiamo fare riferimento a quanto esposto come esempio di esclusione in precedenza. Se consideriamo le 4 curve di luce con tempi di variazione caratteristici di ~ 40 giorni, vediamo che sono tutte caratterizzate da un'accentuata cromaticità e da un'indice di colore $R - I \sim 1.0$. Per rendere significativa un'analisi del genere bisognerebbe disporre di un catalogo completo di questo tipo di segnali sui dati per poi integrarlo con altri risultati noti delle popolazioni di stelle variabili in M31, studio per il quale lo stesso *pixel lensing* si presenta come uno strumento di ricerca efficace.

Quanto si può affermare al momento, dati i tempi (lungi) e il colore ($R - I \in [1.4 \div 2]$) caratteristici degli eventi osservati, è che le variazioni di luminosità rilevate potrebbero essere associate a stelle variabili di tipo *Mira*. Queste sono *supergiganti rosse* di classe spettrale M, caratterizzate da una temperatura effettiva che può scendere fino a $2000 K$, con un periodo di variazione generalmente compreso nell'intervallo $100 \div 500$ giorni e una relazione tra il periodo e la luminosità (e.g. [66]). Circa la possibilità di riconoscere le curve di luce selezionate proprio come quelle caratteristiche di variabili di tipo Mira (sarebbe utile anche in questo senso cercare, per esempio nelle immagini di archivio HST, il segnale della sorgente non amplificata), da una parte abbiamo già evidenziato i problemi legati a una precisa determinazione della temperatura effettiva a partire dalla sola valutazione del colore, dall'altra la limitata base temporale ci impedisce di verificare l'esistenza dell'eventuale ripetizione della variazione di luminosità. Le stesse caratteristiche delle curve di luce suggeriscono del resto di poter escludere altri tipi di variabili, più calde e con frequenza di variazione più elevata.

Abbiamo del resto osservato una dipendenza dei risultati dall'approccio alla procedura di minimizzazione (fit degenerare a 6 parametri piuttosto che non degenerare a 7 parametri). Anche in considerazione di questo, è concepibile una strategia di analisi basata di più sulla caratterizzazione *astrofisica* dei segnali rilevati che su quella *analitica*. In particolare, la richiesta che la variazione di luminosità sia significativa in entrambi i colori, fatta per permettere uno studio adeguato della cromaticità, può di fatto introdurre un *bias* nella selezione. Sarebbe del resto necessario svolgere uno studio più approfondito sulle curve di luce di sorgenti variabili (questo è anche reso difficile dalla scarsità della letteratura a riguardo) per accertare che i criteri utilizzati nell'analisi dell'acromaticità non risultino di fatto troppo selettivi (questo

anche rispetto alla qualità dei dati, cioè rispetto alla precisione fotometrica che raggiungiamo).

Una selezione centrata sull'analisi del *colore* $R-I$ delle sorgenti e sul *tempo caratteristico* $t_{1/2}$ delle variazioni di luminosità potrebbe dare quindi delle risposte differenti e forse più appropriate nella prospettiva dell'esclusione *a priori* di sorgenti variabili come le Mira rispetto alla selezione di eventi di *microlensing*.

In conclusione, abbiamo selezionato 5 curve di luce compatibili con eventi di *microlensing*. *Nessuna* di queste cade nello spazio dei parametri privilegiato all'80% dalle previsioni Monte Carlo. I risultati della nostra selezione non sono in contraddizione con gli esperimenti di ricerca di MACHOs nell'alone della Galassia. La limitata base temporale dei dati impedisce al momento di testare adeguatamente la richiesta unicità degli eventi di *microlensing* per discriminarli da altri eventuali sorgenti variabili. Date le caratteristiche delle curve di luce selezionate, abbiamo sottolineato che *se* si tratta di stelle variabili, le uniche candidate plausibili note sono le variabili di tipo Mira.

Conclusioni

In questo lavoro di ricerca (i cui risultati preliminari sono discussi in [31], e la selezione dei candidati eventi di *microlensing* qui presentata in [30]), a partire da un insieme di dati *originali*¹⁰, abbiamo descritto il lavoro effettuato in tutte le differenti tappe, dall’acquisizione delle immagini fino alla discussione dei risultati, nell’ambito di un’esperienza volta alla ricerca dei MACHOs, naturali candidati al ruolo di materia oscura, la cui presenza all’interno degli aloni galattici potrebbe spiegare, almeno in parte, le contraddizioni evidenziate nel contesto di altri esperimenti astrofisici. Ne cerchiamo le tracce sfruttando la loro caratteristica di oggetti massivi compatti, quindi dotati di un campo gravitazionale che può determinare un effetto di amplificazione della luce per cui sorgenti sulla linea di vista osservatore-MACHO-sorgente appaiono variare nel tempo, in un modo caratteristico, la loro luminosità (l’effetto di *microlensing* gravitazionale).

Rispetto al problema generale della ricerca di MACHOs, ricordiamo come un risultato nullo, o comunque la prova che questi non costituiscono una frazione importante degli aloni, sarebbe importante, tra l’altro, nella prospettiva delle teorie alternative della gravitazione. In ambito galattico, infatti, la necessità della materia oscura è motivata in primo luogo dalla lettura data alle curve di rotazione (scala di distanza dei *kpc*) nell’ambito della teoria di Newton, mentre questa è stata verificata sperimentalmente solo su distanze, molto inferiori, dell’ordine dei *pc*.

Il lavoro di analisi si divide in più parti. Una di preanalisi sulle immagini con la quale, in seguito al trattamento e alla calibrazione degli effetti strumentali, si “normalizza” il segnale ricevuto rispetto a un riferimento comune. Per questo abbiamo sfruttato, introducendo le opportune modifiche, il trattamento dell’immagine sviluppato dal gruppo AGAPE per risolvere i problemi legati alle variazioni fotometriche e alla instabilità del segnale determinata dalle variabili condizioni del *seeing*, proponendo inoltre un approccio unificato delle due distinte correzioni. In seguito siamo entrati nel dettaglio dell’analisi svolta al fine di determinare la strategia migliore rispetto alla possibilità di gestire un elevato numero di immagini acquisite ogni notte, nello stesso filtro, in direzione dello stesso campo di osservazione. Abbiamo messo del resto in evidenza le diverse prospettive, i limiti e le difficoltà, aperte da un’indagine svolta a partire da curve di luce costruite con una operazione di media (“composizione” delle immagini), per cui si ha un punto per ogni notte di osservazione, piuttosto che con più punti per ogni notte. Ricordiamo l’insieme del trattamento iniziale sulle immagini è necessario per rendere significativo il successivo studio *locale* sulle curve di luce.

Utilizzando un metodo particolare, il *pixel lensing*, studiamo le variazioni di luminosità nel corso del tempo per ogni elemento di immagine elementare. Ognuno di questi riceve il flusso di un numero elevato di sorgenti (dell’ordine delle centinaia) che potrebbero dare luogo a fenomeni di *microlensing*. Il *pixel lensing* permette, in particolare, il rilevamento di questo genere di variazioni nel caso in cui le sorgenti siano *non risolte* (segnale della sorgente a riposo confuso nel rumore di fondo). La fase successiva è l’analisi del segnale così individuato, guidata sia dalle conoscenze teoriche sulle curve di luce degli eventi di *microlensing*, sia dalla conoscenza degli altri possibili segnali variabili nel tempo che costituiscono il “rumore” di fondo da cui dobbiamo estrarre l’informazione.

Abbiamo in particolare approfondito diversi aspetti legati alla determinazione dei parametri che caratterizzano il segnale (fit a 4 e 5 parametri per la funzione di amplificazione¹¹), allo studio della bontà dell’interpolazione (test di ipotesi statistici) e all’efficienza di una simile analisi, attraverso una specifica simulazione, prima, e con una verifica sui dati sperimentali poi. Una fondamentale caratteristica degli eventi di *microlensing* (un effetto gravitazionale e quindi puramente *geometrico*) è l’indipendenza dal colore della funzione di amplificazione osservata. Abbiamo perciò sfruttato la possibilità di studiare la

¹⁰ Acquisiti presso il telescopio di 1.3 metri McGraw-Hill, osservatorio MDM, Kitt Peak, USA, e analizzati in modo indipendente dalla collaborazione MEGA che gestisce le osservazioni.

¹¹ A questo riguardo abbiamo anche rilevato una dipendenza dei risultati della selezione al variare dell’approccio seguito.

curva di luce dello stesso evento in due colori differenti, R e I , per distinguere segnali di *microlensing*, acromatici, da altri segnali variabili, le cui variazioni di luminosità sono tipicamente dipendenti dal colore.

Infine abbiamo confrontato i risultati della selezione effettuata con le previsioni di una simulazione Monte Carlo. Questo permette una caratterizzazione fisica dei risultati ottenuti nel contesto iniziale della ricerca di MACHOs come costituenti “oscuri” degli aloni galattici. Le 5 curve di luce selezionate in accordo ai criteri introdotti, risultate compatibili con un evento di *microlensing*, cadono *tutte* ai bordi estremi dello spazio dei parametri osservabili previsto dalle simulazioni. Questo suggerisce in particolare che una frazione importante dell’alone *non* sia costituita da MACHOs di piccola massa $m_{MACHO} \leq 0.01 M_{\odot}$. Inoltre, l’indice di colore ($R - I \in [1.4 \div 2.0]$) e i tempi di variazione ($t_{1/2} \in [48 \div 104]$ giorni) caratteristici delle curve selezionate sono entrambe indicazioni di una possibile contaminazione del segnale da parte di sorgenti fredde e lentamente variabili (variabili Mira), ipotesi che i dati a disposizione, in particolare la limitata base temporale complessiva, al momento non ci permettono di controllare in modo adeguato¹².

Come analisi complementari, abbiamo considerato il segnale di sorgenti intrinsecamente variabili, in particolare abbiamo selezionato 4 curve di luce attribuibili a delle *novæ*, e studiato il prolungamento di candidati eventi di *microlensing* rilevati da altre collaborazioni in direzione di M31. In particolare abbiamo analizzato i risultati delle collaborazioni AGAPE e quelli, recenti, di POINT-AGAPE.

L’analisi sui dati MDM non è conclusa. L’analisi è stata svolta solo sul campo “lontano”, detto Target, e al momento non è stata effettuata alcuna selezione sui dati del campo “vicino” (Control), analisi che dovrebbe permettere, in linea di principio, di verificare l’aspettato gradiente nella profondità ottica. Esistono inoltre nuovi dati acquisiti recentemente non ancora analizzati anche sul campo Target (e abbiamo già sottolineato l’importanza di poter caratterizzare i candidati selezionati rispetto alla caratteristica *unicità* degli eventi di *microlensing*). Circa l’analisi dei dati, abbiamo del resto sottolineato come rimangano aperti diversi problemi. Da una parte la selezione, dove occorre muoversi nella direzione di rendersi indipendenti dall’approssimazione di Paczyński per la descrizione degli eventi di *microlensing*, dall’altra la simulazione Monte Carlo, dove ancora manca un trattamento completo e coerente della efficacia di rilevamento rispetto a tutti i criteri di selezione utilizzati (questo anche rispetto alla acromaticità e alla caratterizzazione delle sorgenti rispetto al colore). Circa la simulazione Monte Carlo, manca inoltre uno studio approfondito della dipendenza dei risultati rispetto alle ipotesi fatte sul sistema fisico (in particolare sulla forma dell’alone).

In prospettiva di future campagne di ricerca, l’analisi di questo insieme di dati ha messo in evidenza la necessità di una strategia di osservazione ottimizzata rispetto al problema posto, per la lunghezza della base temporale e per la frequenza del campionamento.

Oltre allo specifico problema legato ai dati MDM analizzati in questo lavoro, la questione della materia oscura barionica in forma aggregata come una componente importante degli aloni galattici rimane aperta. In questo senso sono lontane dall’esaurimento le possibilità offerte dalla ricerca (sostanzialmente ancora ai suoi inizi) di effetti di *microlensing* gravitazionale in direzione della galassia di Andromeda.

¹²Come già sottolineato, questo potrebbe suggerire una strategia di analisi focalizzata di più sulla caratterizzazione *astrofisica* delle variazioni di luminosità rilevate.

Bibliografia

- [1] C. Afonso *et al.* (EROS) 1999, *Astron. Astrophys.*, **344**, L63
- [2] C. Alard, 1997, *Astron. Astrophys.*, **321**, 424
- [3] C. Alard & J. Guibert, 1997, *Astron. Astrophys.*, **326**, 1
- [4] C. Alcock *et al.* (MACHO), 1993, *Nature*, **365**, 621
- [5] C. Alcock *et al.* (MACHO), 2000, *Ap. J.*, **541**, 734
- [6] C. Alcock *et al.* (MACHO), 2000, *Ap. J.*, **542**, 257
- [7] C. Alcock *et al.* (MACHO), 2000, *Ap. J.*, **542**, 281
- [8] J. D. Anderson *et al.*, 1998, *Phys. Rev. Lett.*, **81**, 2858
- [9] R. Ansari *et al.* (AGAPE), 1997, *Astron. Astrophys.*, **324**, 843
- [10] R. Ansari *et al.* (AGAPE), 1999, *Astron. Astrophys.*, **344**, L49
- [11] R. Ansari *et al.* (EROS), 1999, astro-ph/9911479
- [12] E. Aubourg *et al.* (EROS), 1993, *Nature*, **365**, 623
- [13] M. Aurière *et al.* (POINT-AGAPE), 2001, astrp-ph/0102080 (*submitted to ApJL*)
- [14] J. Bahcall *et al.*, 1994, *Ap. J.*, **435**, L51
- [15] N. Bahcall *et al.*, 1999, *Science*, **284**, 1481
- [16] P. Baillon *et al.*, 1993, *Astron. Astrophys.*, **277**, 1
- [17] E. A. Baltz & J. Silk, 2000, *Ap. J.*, **530**, 578
- [18] O. V. Barabash & Yu. V. Shtanov, 1999, *Phys. Rev.*, **D60**, 064008
- [19] E. Battaner & E. Florido, 2000, *Fundamentals of Cosmic Physics*, *in press*, astro-ph/0010475
- [20] K. G. Begeman, 1989, *Astron. Astrophys.*, **223**, 47
- [21] K. G. Begeman *et al.*, 1991, *Mon. Not. R. Ast. Soc.*, **249**, 523
- [22] E. Bertschinger, 1990, *Ap. J.*, **364**, 370
- [23] J. Bhuvnesh & L. Van Waerbeke, 2000, *Ap. J.*, **530**, L1
- [24] V. Bozza, S. Calchi Novati *et al.* (SLOTT-AGAPE), 1999, astro-ph/9907162
- [25] U. G. Briel *et al.*, 1992, *Astron. Astrophys.*, **259**, L31
- [26] S. Burles & D. Tytler, 1998, *Ap. J.*, **499**, 699
- [27] S. Burles & D. Tytler, 1998, *Ap. J.*, **507**, 732
- [28] S. Burles *et al.*, 1999, *Phys. Rev. Lett.*, **82**, 4176

- [29] S. Calchi Novati, S. Capozziello & G. Lambiase, 2000, *Grav. & Cosm.*, **6**, 143
- [30] S. Calchi Novati *et al.*, 2001, *Astron. Astrophys.*, *submitted*
- [31] S. Calchi Novati, 2000, Ninth Marcel Grossmann Proceedings, R. Ruffini ed. (World Scientific)
- [32] D. O. Caldwell, 1999, in *The Identification of Dark Matter*, ed. N.J.C. Spooner & V. Kudryavtsev, p.527 (World Scientific)
- [33] J. A. R. Caldwell & J. P. Ostriker, 1981, *Ap. J.*, **251**, 61
- [34] R. R. Caldwell *et al.*, 1998, *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 1582
- [35] M. Capaccioli *et al.*, 1989, *A. J.*, **97**, 1622
- [36] S. Capozziello *et al.*, 1996, *La Rivista del Nuovo Cimento* **4**, 1
- [37] S. Capozziello *et al.*, 1997, *Class. Quantum Grav.*, **14**, 3243
- [38] B. Carr, 1994, *Ann. Rev. Astr. Astroph.*, **32**, 531
- [39] B. Carr, 2000, gr-qc/0008005
- [40] B. Carr & M. Sakellariadou, 1998, *Ap. J.*, **516**, 195
- [41] B. Carr *et al.*, 1984, *Ap. J.*, **277**, 445
- [42] M. Créé, 1998, *Astron. Astrophys.*, **329**, 920
- [43] A. P. S. Crotts, 1992, *Ap. J.*, **399**, L43
- [44] A. P. S. Crotts & A. B. Tomaney, 1996, *Ap. J.*, **473**, L87
- [45] A. P. S. Crotts *et al.*, astro-ph/0006282
- [46] P. de Bernardis *et al.*, 2000, *Nature*, **404**, 995
- [47] A. Dekel, 1994, *Ann. Rev. Astr. Astroph.*, **32**, 371
- [48] A. Dekel *et al.*, 1990, *Ap. J.*, **412**, 1
- [49] A. D. Dolgov, 1995, astro-ph/9509057
- [50] F. de Paolis. *et al.*, 1995, *Phys. Rev. Lett.*, **74**, 14
- [51] F. de Paolis. *et al.*, 1998, *Astron. Astrophys.*, **295**, 567
- [52] F. de Paolis. *et al.*, 1998, *Astron. Astrophys.*, **329**, 74
- [53] J. Durbin & G. S. Watson, 1950, *Biometrika*, **37**, 409
- [54] J. Durbin & G. S. Watson, 1951, *Biometrika*, **38**, 159
- [55] J. Einasto, 2000, astro-ph/0011333
- [56] A. Einstein, 1936, *Science*, **84**, 506
- [57] J. Ellis, 2000, *Phys. Scripta*, **T85**, 221
- [58] N. W. Evans & M. I. Wilkinson, 2000, *Mon. Not. R. Ast. Soc.*, **316**, 929
- [59] N. W. Evans *et al.*, 1998, *Ap. J.*, **501**, 45
- [60] N. W. Evans *et al.*, 2000, *Ap. J.*, **540**, L9
- [61] D. J. Fixsen *et al.*, 1998, *Ap. J.*, **534**, 123
- [62] Y. Fukuda *et al.*, 1998, *Phys. Rev. Lett.*, **81**, 1562

- [63] M. Fukugita *et al.*, 1998, *Ap. J.*, **503**, 518
- [64] G. Gilmore, 1999, in *Identification of Dark Matter*, ed. N. J. C. Spooner & V. Kudryavtsev (World Scientific)
- [65] G. Gilmore & M. Unavane, 1998, *Mon. Not. R. Ast. Soc.*, **301**, 813
- [66] I. S. Glass *et al.*, 1995, *Mon. Not. R. Ast. Soc.*, **273**, 383
- [67] P. Gondolo, 1999, *Ap. J.*, **510**, L29
- [68] A. Gould, 1992, *Ap. J.*, **392**, 442
- [69] A. Gould, 1994, *Ap. J.*, **421**, L71
- [70] A. Gould, 1996, *Ap. J.*, **470**, 201
- [71] A. Gould, 1999, *Ap. J.*, **525**, 724
- [72] D. S. Graff *et al.*, 1999, *Ap. J.*, **523**, L77
- [73] K. Griest, 1991, *Ap. J.*, **366**, 412
- [74] K. Griest, 1991, *Ap. J.*, **372**, L79
- [75] K. Griest & W. Hu, 1993, *Ap. J.*, **407**, 440
- [76] A. H. Guth, 1981, *Phys. Rev.*, **D23**, 347
- [77] G. Gyuk & E. Gates, 1999, *Mon. Not. R. Ast. Soc.*, **304**, 281
- [78] G. Gyuk & A. P. S. Crotts, 2000, *Ap. J.*, **535**, 621
- [79] R. M. Häfner *et al.*, 1999, *Mon. Not. R. Ast. Soc.*, **314**, 433
- [80] S. Hanany *et al.*, 2000, *Ap. J.*, **545**, L5
- [81] B. Hansen, 1999, *Ap. J.*, **517**, L39
- [82] C. J. Hogan, 1999, astro-ph/9912107
- [83] R. Ibata *et al.*, 1999, *Ap. J.*, **524**, 195
- [84] R. Ibata *et al.*, 1999, *Ap. J.*, **532**, L41
- [85] Ph. Jetzer, 1994, *Astron. Astrophys.*, **286**, 426
- [86] Ph. Jetzer *et al.*, 1998, *Astron. Astrophys.*, **336**, 411
- [87] Ph. Jetzer, 1998, in *Topics on Gravitational Lensing*, eds. A. A. Marino, L. Grenacher, S. Capozziello, G. Iovane, Napoli
- [88] G. Jungman *et al.*, 1996, *Phys. Rep.*, **267**, 195
- [89] J. Kaplan, 1998, in *Topics on Gravitational Lensing*, eds. A. A. Marino, L. Grenacher, S. Capozziello, G. Iovane, Napoli
- [90] E. Kerins & N. W. Evans, 1999, *Ap. J.*, **517**, 734
- [91] E. Kerins *et al.* (POINT-AGAPE), 2000, astro-ph/0002256, (*MNRAS*, *in press*)
- [92] E. Kerins, 2000, astro-ph/0007137
- [93] L. King & P. Schneider, 2000, astro-ph/0012202
- [94] M. Kiraga & B. Paczyński, 1994, *Ap. J.*, **430**, L101
- [95] E. Kolb & M. Turner, 1990, *The Early Universe*, Addison Wesley

- [96] L. M. Krauss & M. White, 1992, *Ap. J.*, **397**, 357
- [97] D. La & P. J. Steinhardt, 1989, *Phys. Rev. Lett.*, **62**, 376
- [98] A. Lange *et al.*, 2000, astro-ph/0005004
- [99] T. Lasserre *et. al.* (EROS), 2000, *Astron. Astrophys.*, **355**, L39
- [100] Y. Le Du, 2000, PhD thesis, Université Paris VI, Collège de France, Paris
- [101] A. D. Linde, 1982, *Phys. Lett.*, **108B**, 389
- [102] G. Magnano & L. M. Sokolowski, 1994, *Phys. Rev.*, **D50**, 5039
- [103] E. A. Magnier *et al.*, 1993, *Astron. Astrophys. Supp.*, **96**, 379
- [104] A. H. Maller *et al.*, 2000, *Ap. J.*, **533**, 194
- [105] P. D. Mannheim, 2000, gr-qc/0001011
- [106] P. D. Mannheim & D. Kazanas, 1989, *Ap. J.*, **342**, 635
- [107] S. Mao & B. Paczyński, 1991, *Ap. J.*, **374**, L37
- [108] S. McGaugh, 2000, *Ap. J.*, **541**, L33
- [109] M. Milgrom, 1983, *Ap. J.*, **270**, 365
- [110] M. Milgrom, 1983, *Ap. J.*, **270**, 371
- [111] M. Milgrom, 1983, *Ap. J.*, **270**, 384
- [112] J. H. Oort, 1932, *Bull. Astron. Inst. Netherlands*, **6**, 249
- [113] J. P. Ostriker *et al.*, 1974, *Ap. J.*, **193**, L1
- [114] B. Paczyński, 1986, *Ap. J.*, **304**, 1
- [115] B. Paczyński, 1991, *Ap. J.*, **371**, 63
- [116] N. Palanque-Delabrouille *et. al.* (EROS), 1998, *Astron. Astrophys.*, **332**, 1
- [117] B. R. Parodi *et al.*, 2000, *Ap. J.*, **540**, 634
- [118] J. A. Peacock, 1999, *Cosmological Physics*, Cambridge University Press
- [119] P. Peebles, 1993, *Principles of Physical Cosmology*, Princeton University Press
- [120] S. Perlmutter *et al.*, 1999, *Ap. J.*, **517**, 565
- [121] M. Persic & P. Salucci, 1992, *Mon. Not. R. Ast. Soc.*, **258**, 14P
- [122] D. Pfenniger *et al.*, 1994, *Astron. Astrophys.*, **285**, 83
- [123] F. Queinnec, 1994, PhD thesis, Université Paris VII, Paris
- [124] G. G. Raffelt, 1990, *Phys. Rep.*, **198**, 1
- [125] S. Refsdal, 1964, *Mon. Not. R. Ast. Soc.*, **128**, 295
- [126] I. N. Reid *et al.*, 1999, *Ap. J.*, **521**, 613
- [127] S. T. Ridgway *et al.*, 1980, *Ap. J.*, **235**, 126
- [128] B. P. Roe, 1992, *Probability and Statistics in Experimental Physics*, Springer-Verlag
- [129] L. Roszkowski, 1999, in *Cosmo-98*, ed. D. Caldwell, hep-ph/9903467
- [130] E. Roulet & S. Mollerach, 1997, *Phys. Rep.*, **279**, 67

- [131] V. C. Rubin & W. K. Ford, 1970, *Ap. J.*, **159**, 379
- [132] P. Sackett, 2000, astro-ph/0011128
- [133] K. Sahu, 1994, *Nature*, **370**, 275
- [134] S. Sakai *et al.*, 2000, *Ap. J.*, **529**, 698
- [135] R. H. Sanders, 1998, *Astron. Astrophys.*, **296**, 1009
- [136] R. H. Sanders, 1990, *Astron. Astrophys. Rev.*, **2**, 1
- [137] S. Schindler, 2000, *Astron. Astrophys. Supp.*, **142**, 433
- [138] P. Schneider, J. Ehlers & E. E. Falco, 1992, *Gravitational Lenses*, Springer-Verlag, Berlin
- [139] J. A. Sellwood & A. Kosowky, 2000, *Ap. J.*, *in press* (astro-ph/0009074)
- [140] E. P. S. Shellard & R. A. Battye, 1998, *Phys. Rep.*, **307**, 227
- [141] Y. Sigad *et al.*, 1998, *Ap. J.*, **495**, 516
- [142] H. Sirousse-Zia, 1998, *Gen. Relativ. Grav.*, **30**, 1273
- [143] A. A. Starobinsky, 1980, *Phys. Lett.*, **91B**, 99
- [144] G. Steigman, 2000, astro-ph/0009506
- [145] K. Stelle, 1978, *Gen. Relativ. Grav.*, **9**, 353
- [146] M. Strauss *et al.*, 1992, *Ap. J.*, **361**, 49
- [147] C. M. Tamanaha *et al.*, 1990, *Ap. J.*, **358**, 164
- [148] V. Trimble, 1987, *Ann. Rev. Astr. Astroph.*, **25**, 425
- [149] M. S. Turner, 1990, *Phys. Rep.*, **197**, 67
- [150] M. S. Turner, 1999, in *Physics in Collision*, ed. M. Campbell & T. M. Wells (World Scientific)
- [151] J. A. Tyson & P. Fischer, 1995, *Ap. J.*, **446**, L55
- [152] D. Tytler *et al.*, 2000, *Physica Scripta*, **T85**, 12
- [153] A. Udalski *et al.*, 1993, *Acta Astronomica*, **43**, 289
- [154] A. Udalski *et al.*, 1994, *Acta Astronomica*, **44**, 165
- [155] S. Weinberg, 1972, *Gravitation and Cosmology*, Wiley
- [156] S. D. M. White *et al.*, 1993, *Nature*, **366**, 429
- [157] M. I. Wilkinson & N. W. Evans, 1999, *Mon. Not. R. Ast. Soc.*, **310**, 645
- [158] H. J. Witt & S. Mao, 1994, *Ap. J.*, **430**, 505
- [159] P. Woźniak & B. Paczyński, 1997, *Ap. J.*, **487**, 55
- [160] D. York, 1966, *Canadian Journal of Physics*, **44**, 1079
- [161] D. Zaritsky, 1998, astro-ph/9810069
- [162] H. S. Zhao, 1998, *Mon. Not. R. Ast. Soc.*, **294**, 139
- [163] H. S. Zhao *et al.*, 1996, *Mon. Not. R. Ast. Soc.*, **278**, 488
- [164] F. Zwicky, 1933, *Helv. Phys. Acta*, **6**, 110
- [165] F. Zwicky, 1937, *Phys. Rev.*, **51**, 290
- [166] F. Zwicky, 1937, *Phys. Rev.*, **51**, 679